Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'informatique
Année universitaire : 2025-2026

Module : Analyse 1
Licence 1, informatique

Série de TD n° 6 : Fonctions élémentaires

Exercice 1 : Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right),\ \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right),\ \arccos\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right).$$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation : $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$
2. Justifier que l'équation : $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$, n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\right)$$
2. Calculer les limites de f et de g aux bornes des ensembles de définition, puis calculer les dérivées lorsque cela est possible. (La fonction g est laissée aux étudiants).

Exercice 4 : Soit $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right), x > 0.$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. En déduire que : $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right), \forall x > 0.$

Exercice 5 : (cet exercice est laissé aux étudiants) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f. Puis calculer les limites en $\pm\infty$.
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Dresser le tableau de variation et tracer sommairement le graphe de f.

Exercice 6 : Démontrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\mathrm{sh}(x) \geq x,$$

puis en déduire que

$$\operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 7 : Simplifier les expressions suivantes :

1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$
2. $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$
3. $\operatorname{sh}(2 \operatorname{argsh} x)$ $\big($utiliser la relation $\operatorname{sh}(2t) = 2\operatorname{sh}(t)\operatorname{ch}(t)\big)$.

Exercice 8 :

1. Etudier le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})\right)$$

2. Simplifier l'expression de f en fonction de ln lorsqu'elle a un sens puis tracer son graphe.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$.