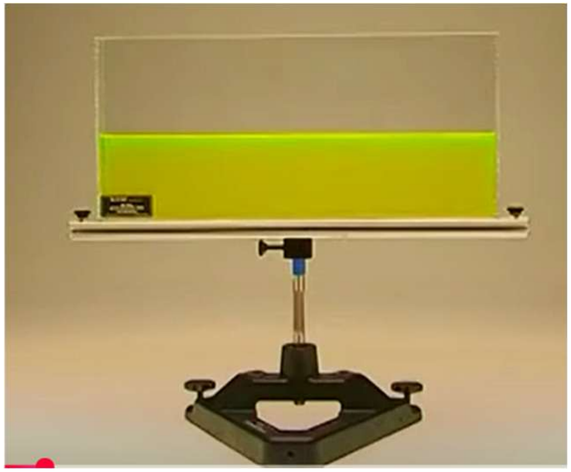
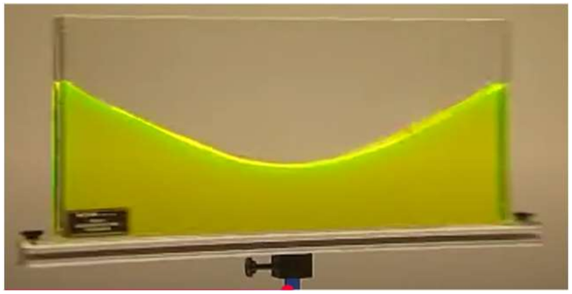
Chapitre II : Statique des fluides

1. Définition
2. Pression en un point d'un fluide au repos
3. Unités de la pression
4. Equation fondamentale de l'hydrostatique
5. Cas d'un fluide soumis uniquement au champ de la gravité
6. Principe de pascal
7. Relation fondamentale de la statique des fluides
8. Surfaces isobares
9. Pression effective et pression absolue
10. Dispositifs de mesure de la pression
11. Pression en un point pour des fluides non miscibles superposés
12. Force de pression exercée par un fluide sur une surface plane

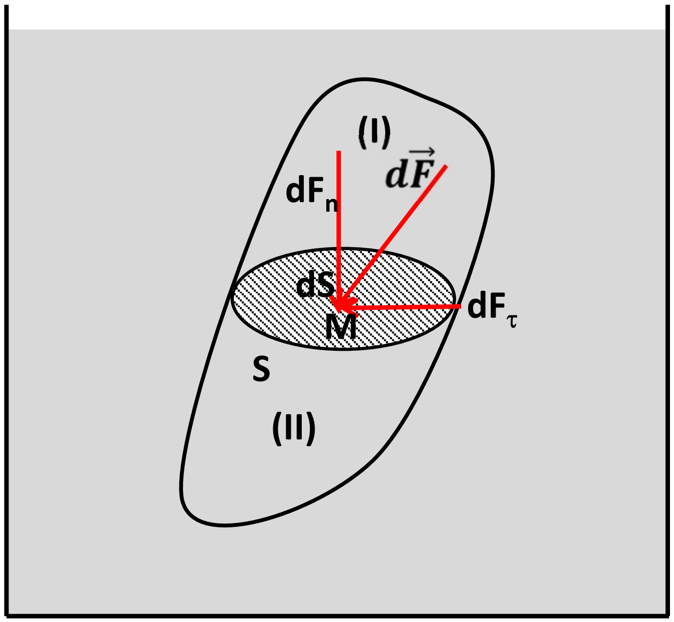
1. Définition

La statique des fluides consiste à étudier les fluides (gaz et liquides) au repos. Lorsque le fluide est un liquide on l'appelle l'hydrostatique.





2. Pression en un point dans un fluide au repos



$$\vec{T} = \lim_{dS \to 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$: Tension au point M.

$$P = \lim_{dS \to 0} \frac{dF_n}{dS}$$: Tension normale au point M.

$$\tau = \lim_{dS \to 0} \frac{dF_\tau}{dS}$$: Tension tangentielle au point M.

La grandeur scalaire de la tension normale s'appelle pression statique pour les fluides en général et pression hydrostatique pour les liquides.

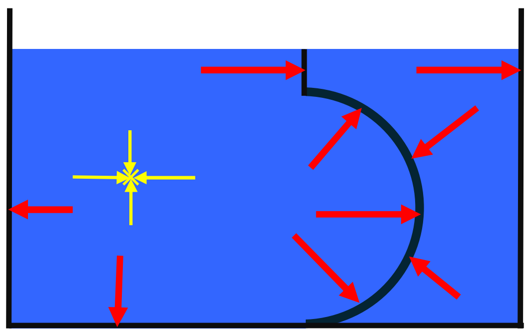
$$P = \lim_{dS \to 0} \frac{dF_n}{dS}$$

Propriétés de la pression hydrostatique en un point

Il existe deux propriétés principales :

a) La pression en un point d'un fluide au repos est toujours dirigée normalement à la surface.

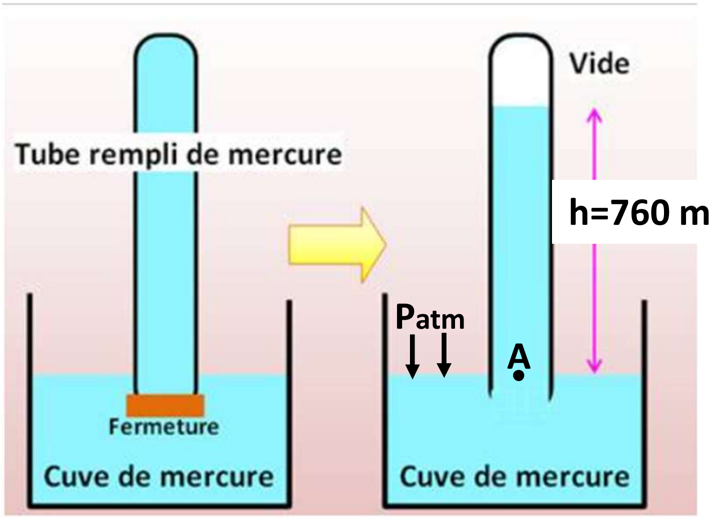
b) En un point d'un fluide au repos, la pression a la même valeur dans toutes les directions.



3. Unités de la pression

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[M][L][T]^{-2}}{[L]^2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$$

Dans le système international (SI) l'unité de la pression est : $kg.m^{-1}.s^{-2}$



Autres unités de la pression :

Le pascal : 1 Pa = 1 $kg.m^{-1}.s^{-1}$

Le bar : 1 bar = 10^5 Pa

L'atmosphère : 1 atm = 101325 Pa

Le mètre de colonne d'eau : 1 $m_{eau} = \rho_{eau}.g.1 = \rho_{eau}.g$ Pa.

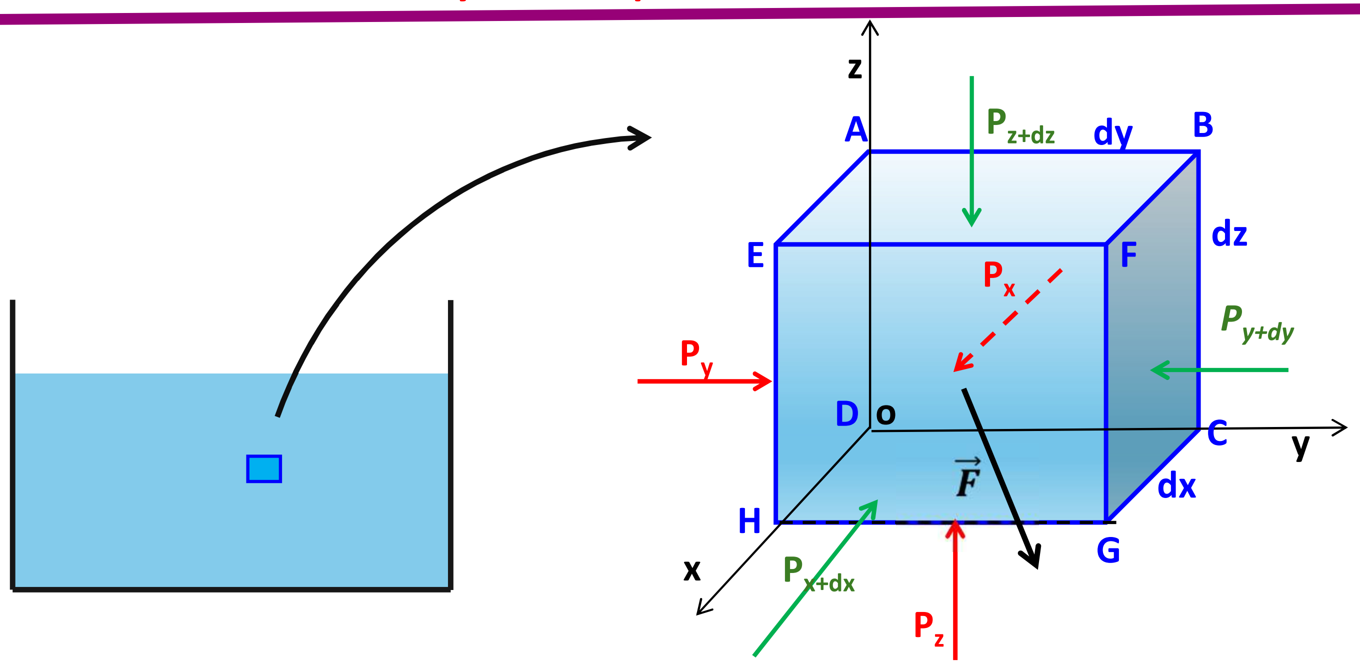
Le kg/cm² : 1 kg/cm² = 10^4.g Pa

$P_A = P_{atm} = \rho.g.h$

ρ=13595kg/m3, g=9,80665m/s², h=0,76m

$P_A = P_{atm} = 101325$ Pa

4. Equation fondamentale de l'hydrostatique



Etudions l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

- Forces extérieures (à distance)
- Forces sur les six facettes (de surface)

Les forces à distance

Soient X, Y et Z les composantes respectives suivant ox, oy , oz des forces agissant sur la masse fluide et rapportées à l'unité de masse.

$$\vec{F}\begin{cases} F_x = \rho X dxdydz \\ F_y = \rho Y dxdydz \\ F_z = \rho Z dxdydz \end{cases}$$

Forces de surface (Pressions sur les surfaces)

Suivant ox est : $\left(P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right)\right)dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$

Suivant oy est : $\left(P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\right)dxdz = -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz$

Suivant oz est : $\left(P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\right)dxdy = -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz$

La condition d'équilibre:

$$\rho X dxdydz - \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = 0$$

$$\rho Y dxdydz - \frac{\partial P}{\partial y}dydxdz = 0$$

$$\rho Z dxdydz - \frac{\partial P}{\partial z}dzdxdy = 0$$

On obtient en définitive :

$$\left.\begin{cases} X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}\right\} \text{Equations d'Euler}$$

Ou en notation vectorielle $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P$

La condition d'équilibre:

$$\rho X dxdydz - \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = 0$$

$$\rho Y dxdydz - \frac{\partial P}{\partial y} dydxdz = 0$$

$$\rho Z dxdydz - \frac{\partial P}{\partial z} dzdxdy = 0$$

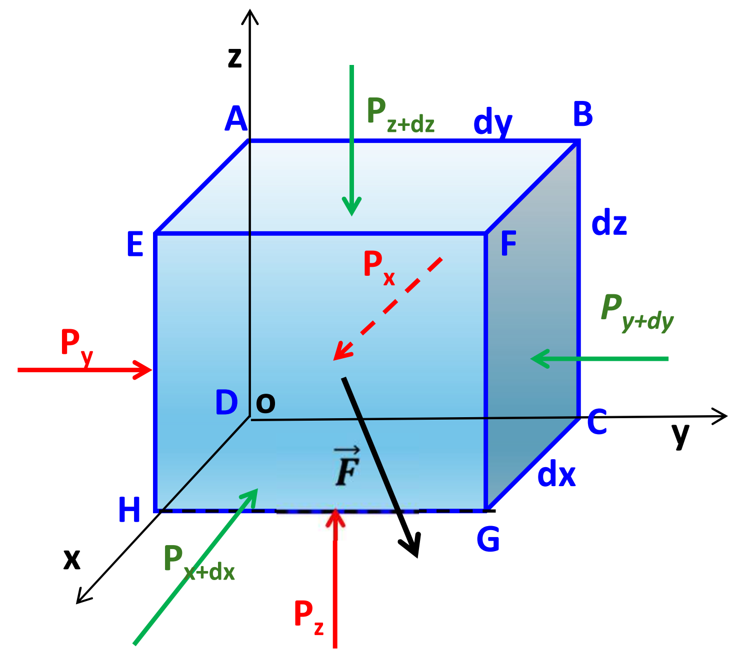
$$\Rightarrow \begin{cases} X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

ou

$$\left.\begin{cases} X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}\right\} \text{Equations d'Euler}$$

Ou en notation vectorielle $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P$

Le système d'équations précédent peut s'écrire également

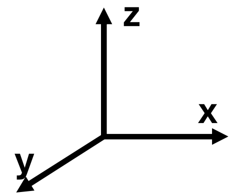


$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} dx = X dx \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} dy = Y dy \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} dz = Z dz \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\rho} dP = X dx + Y dy + Z dz$$

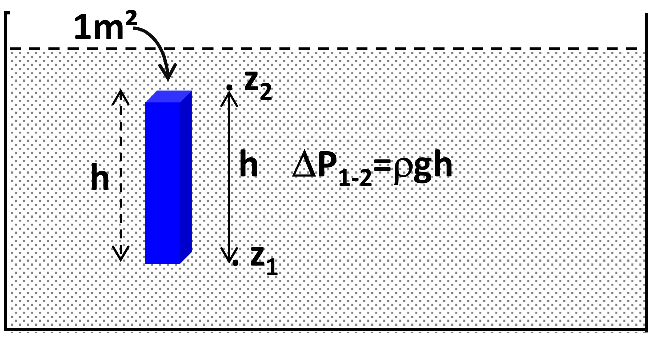
l'équation fondamentale (ou différentielle) de l'hydrostatique

5. Cas d'un fluide soumis uniquement au champ de la gravité

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g$$



Par intégration entre z_1 et z_2, on obtient : $P_2 - P_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \Rightarrow P_1 - P_2 = \Delta P = \rho g(z_2 - z_1) = \rho g h$



La différence de pression entre deux points d'une masse liquide au repos est égale au poids d'une colonne du liquide ayant pour base l'unité de section et pour la hauteur la différence de niveau des deux points considérés.

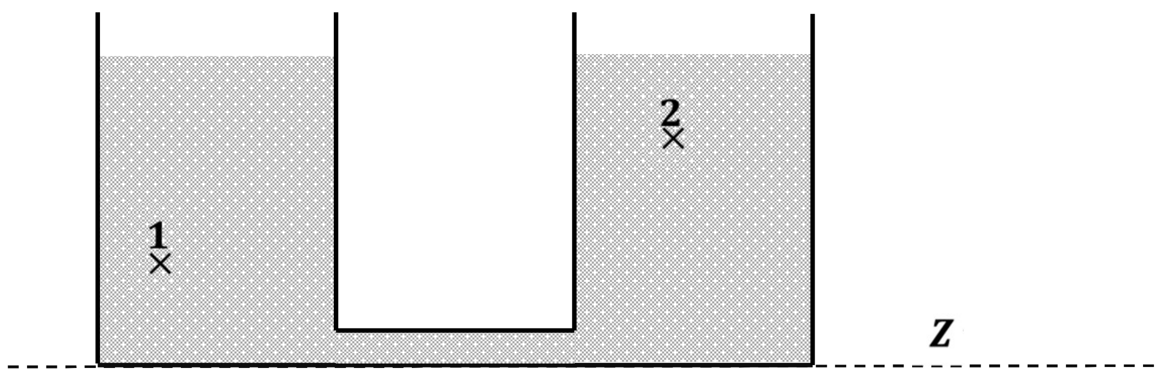
6. Principe de pascal

La relation $P_1 - P_2 = \Delta P = \rho g(z_2 - z_1) = \rho g h$ montre que ΔP est indépendant des pressions P_1 et P_2 qui règnent respectivement à z_1 et z_2. Pour une différence z_1-z_2 constante, si P_1 augmente, P_2 augmentera aussi de la même quantité.

7. Relation fondamentale de la statique des fluides

Elle exprime comment la pression varie avec la profondeur dans un fluide au repos sous l'influence uniquement de la gravité.

$$P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1) \qquad \Rightarrow P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \qquad \Rightarrow P + \rho g z = Cte$$



8. Surfaces isobares

Une surface isobare (surface de niveau) est une surface où la pression est la même en tout point.

$\Rightarrow$ **La pression P est constante.** $\Rightarrow$ **dP = 0** $\Rightarrow$ $dP = \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0$

$\Rightarrow$ $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{F}.\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{grad}P.\overrightarrow{dr} = 0$

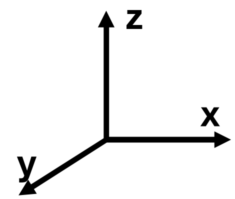
Avec $\begin{cases} X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ Y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ Z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$ **Et** $\overrightarrow{dr} = (dx, dy, dz)$

$\Rightarrow$ **Les surfaces isobares sont perpendiculaires au gradient de pression (la résultante des forces de volume)**

Cas d’un fluide soumis uniquement au champ de la gravité

on a :

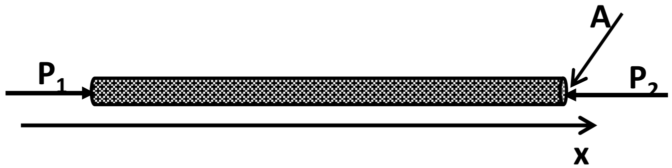
$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g \end{cases} \Rightarrow \quad dP = \overrightarrow{grad}P.\overrightarrow{dr} = \vec{g}.\overrightarrow{dr} = 0$$



Tout plan horizontal dans un fluide au repos est une surface isobare.

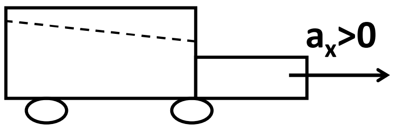
Avec un raisonnement plus simple :

On considère un volume élémentaire de la masse fluide horizontal sous forme de tube dans un fluide au repos

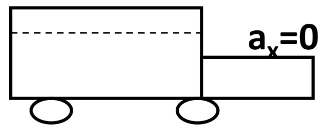


Si l’on considère l’état d’équilibre du volume élémentaire suivant l’axe horizontal, on obtient : $P_1 A - P_2 A = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$

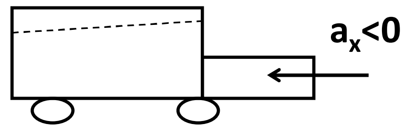
Cas d’un fluide dans un réservoir soumis à un mouvement de translation horizontale



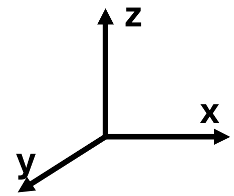
Mouvement accéléré



Mouvement uniforme



Mouvement décéléré



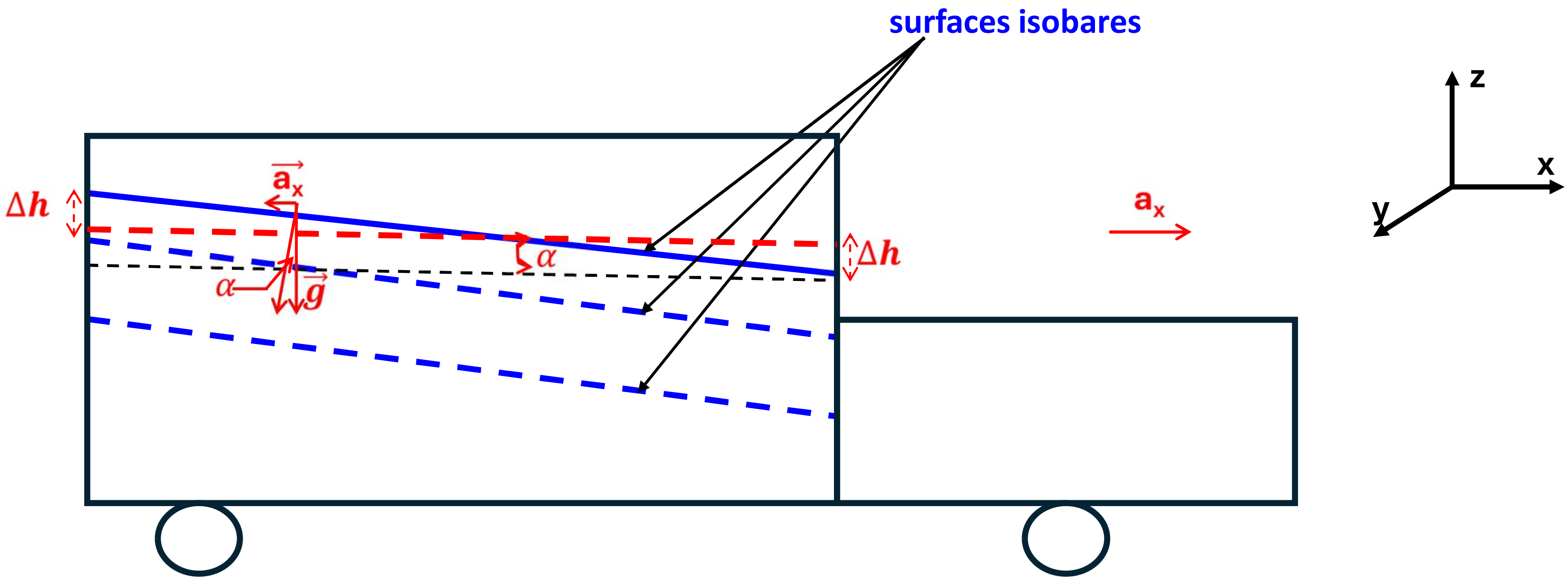
$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + a_x = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} - g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = a_x \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = -g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}dP = a_x dx - g dz$$

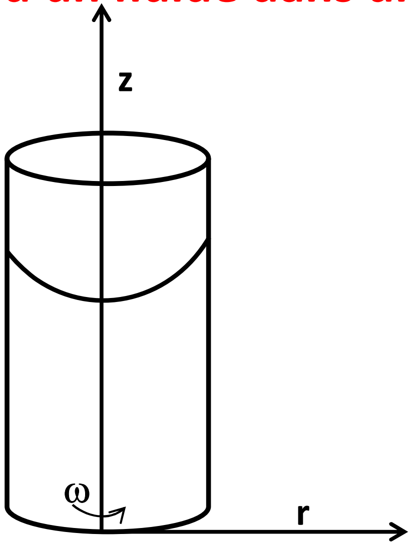
Surface isobare : $dp = 0 \Rightarrow dP = \overrightarrow{grad}P.\overrightarrow{dr} = 0 \Rightarrow a_x dx - g dz = 0 \Rightarrow z = \frac{a_x}{g} \; x + cte$

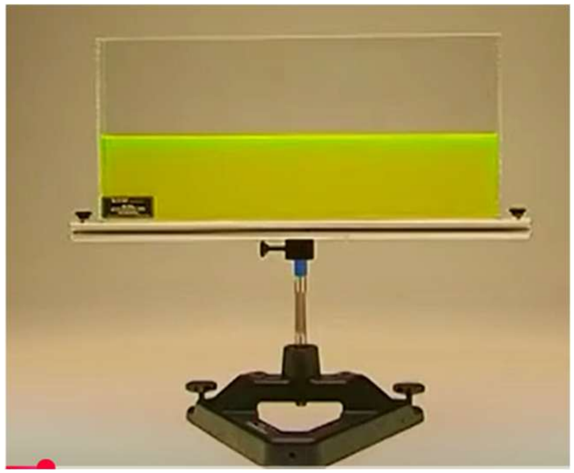
Les surfaces isobares sont des plans inclinés d’une pente égale à $^{a_x}/_g$

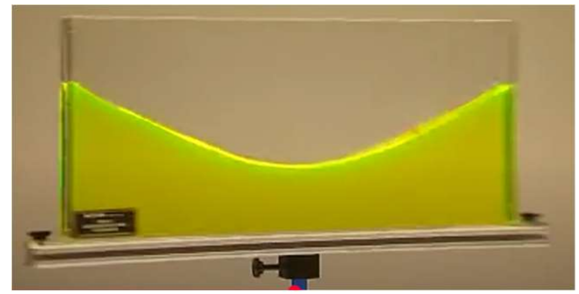


surfaces isobares
Δh
$\vec{a}_x$
α
$\vec{g}$
Δh
a_x
z
x
y

Cas d’un fluide dans un récipient soumis à mouvement de rotation avec une vitesse angulaire ω



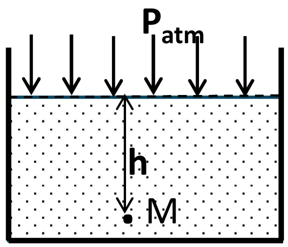




$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - r\omega^2 = 0 \\ -\frac{1}{r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = r\omega^2 \\ \frac{1}{r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -g \end{cases}$$

9. Pression effective et pression absolue

Soit un fluide au repos en contact avec l'air (figure).
Au point M la pression est égale :



$P_M = P_0 + \rho gh$

A la surface de contact avec l'air (surface libre), la pression est généralement représentée par la pression atmosphérique P_{atm}.

La pression absolue au point M s'écrit :
$P_M = P_{atm} + \rho gh$

Et si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique (on considère $P_{atm} = 0$),

on obtient la pression effective (relative) au point M.
$P_M = \rho gh$

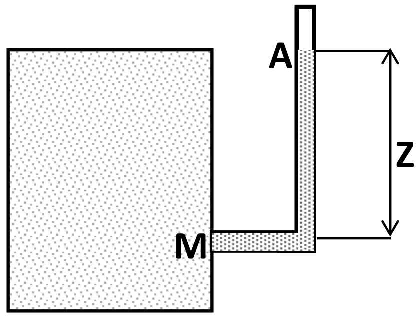
10. Dispositifs de mesure de la pression

Tube piézométrique

Soit un point M d'un liquide au repos. Faisons déboucher en M un tube. La surface libre du liquide se fixe à la hauteur verticale Z au-dessus de M. La pression relative P_M en M :

$$P_M = \rho g Z$$

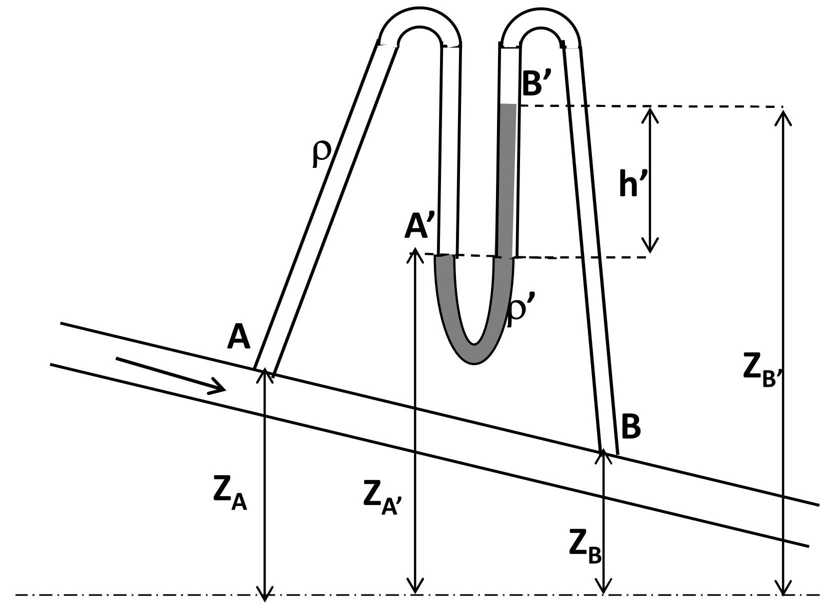
En hauteur de liquide elle est égale **Z** m liquide



Le niveau A atteint par le liquide dans le tube par rapport à un plan de référence s'appelle le niveau piézométrique. Il est le même quelle que soit l'inclinaison du tube par rapport à la verticale.

11. Manomètre différentiel à deux liquides

Lorsque la différence de pression est très grande ou très petite entre deux sections, on utilise un manomètre différentiel à deux liquides constitué par un tube en U en verre dans lequel on verse une quantité convenable d'un liquide de masse volumique ρ' différente de la masse volumique du fluide ρ et non miscible avec lui (figure 6). (voir TD pour plus de développement)



12. Pression en un point pour des fluides non miscibles superposés

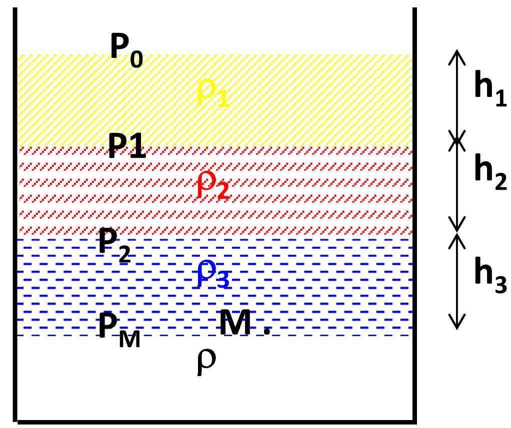
Dans le cas de couches de fluides non miscibles avec des masse volumiques différentes, superposées les unes sur les autres, la pression hydrostatique au point M (figure) est égale :

On a :

$$P_M = P_2 + \rho_3 g h_3$$

$$P_2 = P_1 + \rho_2 g h_2$$

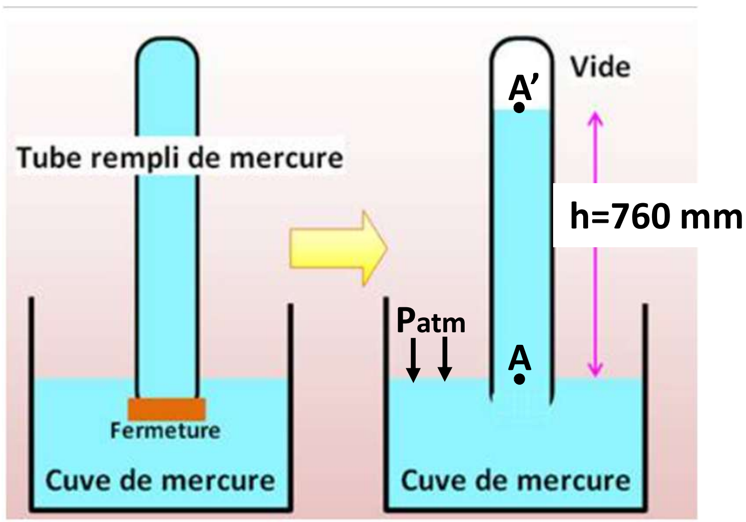
$$P_1 = P_0 + \rho_1 g h_1$$



On remplace P_1 et P_2 :

$$P_M = P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_0 + \sum \rho_i h_i g$$

Retour sur l'expérience de Torricelli



$P_A = P_{atm}$ (surface isobare)

$P_A + \rho.g \,.\, Z_A = P_{A'} + \rho.g \,.\, Z_{A'}$

$P_{A'} = 0,\ Z_{A'} - Z_A = h$

$P_A = \rho.g.h$

ρ=13595kg/m3, g=9,80665m/s², h=0,76m

$P_A = P_{atm} = 101325$ Pa

13. Force de pression exercée par un fluide sur une surface plane

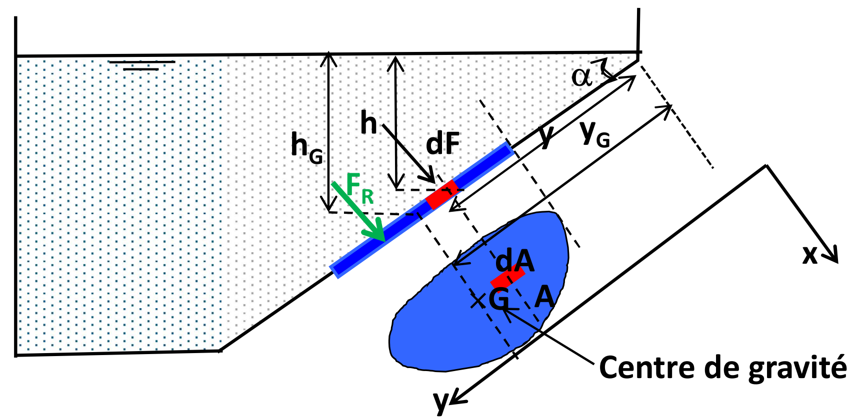
Expression générale de la force de pression

La force élémentaire dF s'exerçant sur une surface élémentaire dA :

$$dF = P.dA = (P_{atm} + \rho gh)dA = P_{atm}.dA + \rho gh.dA$$

La force résultante F_R est égale à l'intégrale de dF sur toute la surface A :

$$F_R = \int_A P.dA = \int_A P_{atm}.dA + \int_A \rho gh.dA$$



Puisque $h = y.sin\alpha$

On obtient :

$$F_R = P_{atm}.A + \int_A \rho gy.sin\alpha.dA = \rho g sin\alpha \int_A y.dA$$

L'expression du centre de gravité:

$$\int_A y.dA = y_G.A$$

$$F_R = P_{atm}.A + \rho g.sin\alpha.y_G A = \rho g h_G A$$

En général on travaille en pression relative (Patm n'est pas prise en compte), l'expression de la force de pression devient:

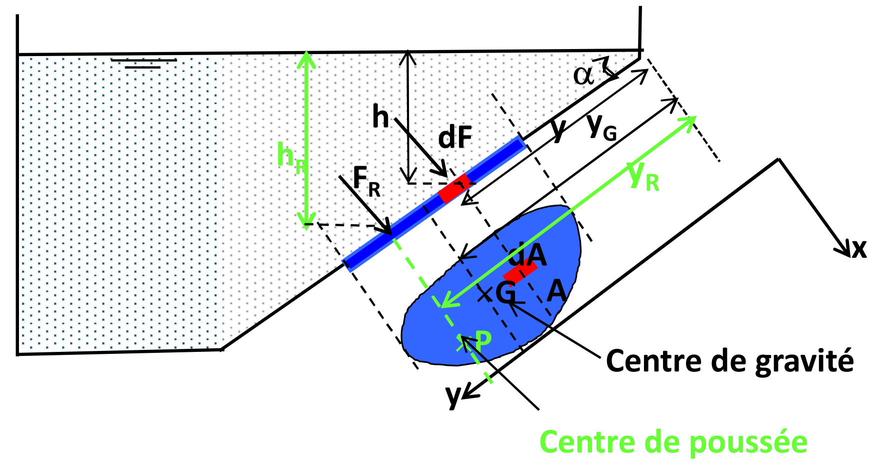
$$F_R = \rho g h_G A$$

Position du point d'application

Pour déterminer, $y_{R,}$ la position du point d'application de la force résultante F_R, on calcule le moment de la force résultante F_R comme étant égale à la somme des moments des forces élémentaires M_i:

$$M_{FR/ox} = F_R y_R = \sum \ M_i = \int_A \ \rho g.y.sin\alpha.y.dA$$

$$\sum_{AB} M_i = \int_{AB} \rho g.sin\alpha.y^2.dA = \rho g.sin\alpha \int_A \ y^2.dA$$



En remplaçant la force de pression par son expression, on obtient :

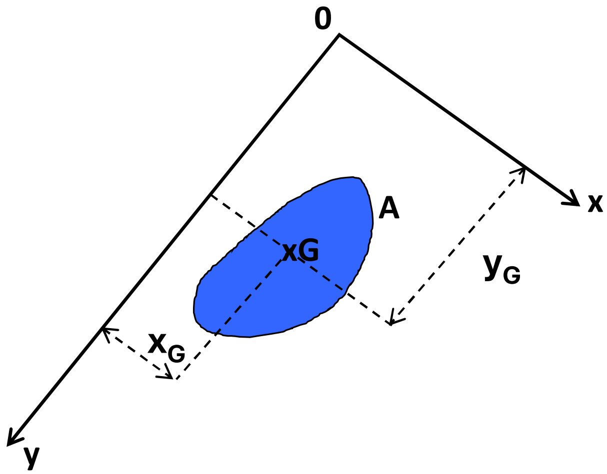
$$F_R y_R = \rho g y_G.sin\alpha.A.y_R = \rho g.sin\alpha \int_A \ y^2.dA$$

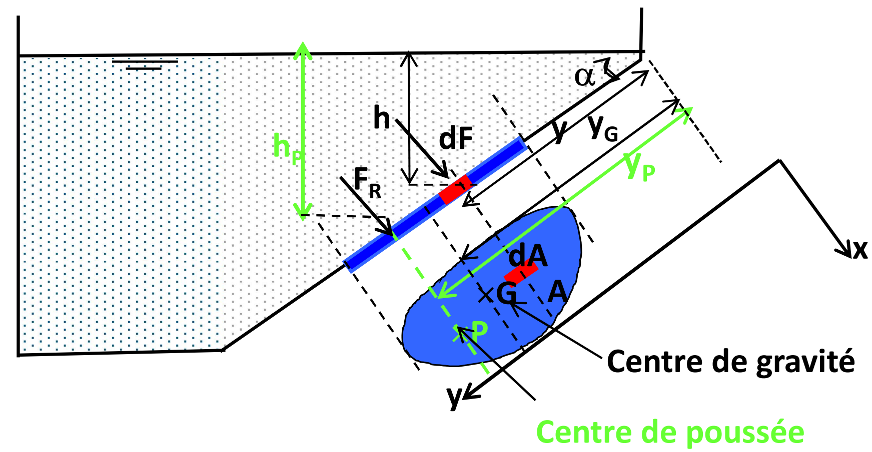
L'intégrale $\int_A \ y^2.dA$ représente le moment d'inertie de la surface A par rapport à l'axe ox (I_{ox}).
On obtient donc :

$$y_R = \frac{\int_A \ y^2.dA}{y_G.A} = \frac{I_{ox}}{y_G.A}$$

D’après le théorème de Hugens,

$$I_{ox} = I_{Gx} + Ay_G^2$$





avec I_{Gx} est le moment d’inertie de la surface A par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l’axe ox.
D’où :

$$y_R = y_G + \frac{I_{Gx}}{Ay_G} \Longrightarrow h_R = h_G + \frac{I'_{Gx}}{A'h_G}$$

A’ est la surface de la projection de A sur le plan verticale
I'_{Gx} son moment d’inertie par rapport à Gx

La cordonnée du point d'application de la force de pression suivant ox, $x_{R,}$ peut être calculée de la même manière en calculant les moments autour de l'axe oy.

$$M_{FR/oy} = F_R x_R = \rho g y_G . sin\alpha . A . x_R = \sum M_i = \int_A \rho g . sin\alpha . y . x . dA$$

Et on obtient : $x_R = \frac{\int_A x.ydA}{y_G A} = \frac{I_{xy}}{y_G A}$

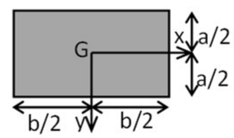
Utilisons encore le théorème de Hugens : $I_{xy} = I_{Gxy} + A x_G y_G$

On peut écrire alors : $x_R = \frac{I_{Gxy}}{A . y_G} + x_G$

Avec I_{Gxy} est le moment d'inertie par rapport à un repère orthogonal passant par le centre de gravité de la surface et formé par translation du repère oxy.

Si la surface en contact avec le fluide est symétrique par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à l'un des axes ox ou oy, $I_{Gxy} = 0$

Rectangle



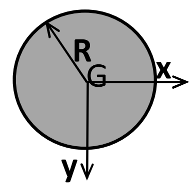
$A = a.b$

$I_{xG} = 1/12ba^3$

$I_{yG} = 1/12ab^3$

$I_{xyG} = 0$

Cercle

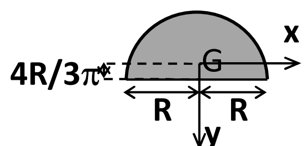


$A = \pi R^2$

$I_{xG} = I_{yG} = \pi R^4/4$

$I_{xyG} = 0$

Demi-Cercle



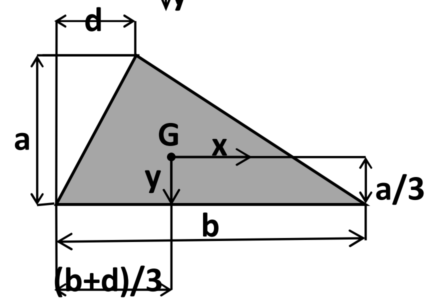
$A = \pi R^2/2$

$I_{xG} = 0.1098R^4$

$I_{yG} = 0.3927\ R^4$

$I_{xyG} = 0$

Triangle



$A = ab/2$

$I_{xG} = ba^3/36$

$I_{xyG} = ba^2(b-2d)/70$

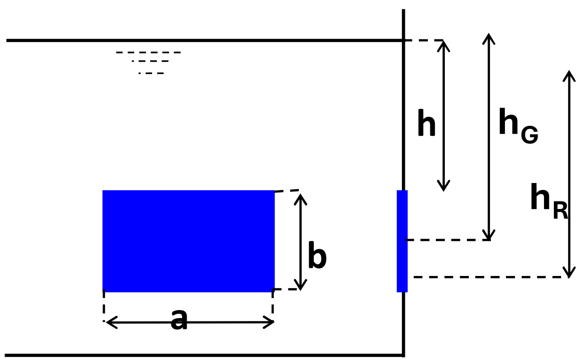
Cas d'une paroi plane verticale

Dans le cas d'une paroi plane verticale, l'angle d'inclinaison α est égal à 90° et l'axe y devient vertical.

$$F_R = \rho g h_G A = \rho g \left(h + \frac{b}{2}\right) . a . b$$

$$h_R = h_G + \frac{I_{Gx}}{A h_G} = h + \frac{b}{2} + \frac{b^3 a}{12 . a . b (h + \frac{b}{2})}$$

$$x_R = x_G + \frac{I_{Gxh}}{A h_G} = x_G = a/2$$



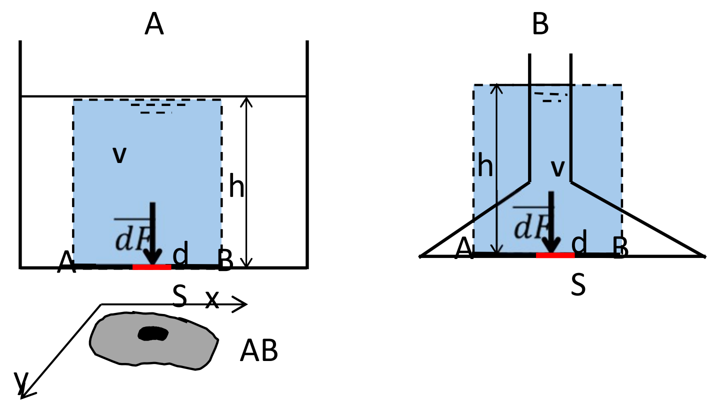
Cas d'une paroi plane horizontale

Soit un récipient contenant un fluide au repos de hauteur h (figure). La surface horizontale AB fait partie de la paroi du fond.

La force dF agissant sur l'élément de surface dS s'écrit

$df = PdS$ **avec** $P = \rho g h$ **(on utilise la pression relative)**

On obtient $dF = \rho g h dS$



On intègre dF sur la surface S pour obtenir la résultante des forces de pression F_R

$$F_R = \rho g h \int dS = \rho g h S = \rho g V$$

avec V est le volume de la colonne du fluide réel (cas A) ou imaginaire (cas B) se trouvant au-dessus de S.

La position du point d'application de la résultante des forces de pression F_R **est le centre de gravité de la colonne du fluide considéré (cas A ou B).**

Exercice N° 9 (TD n°2)

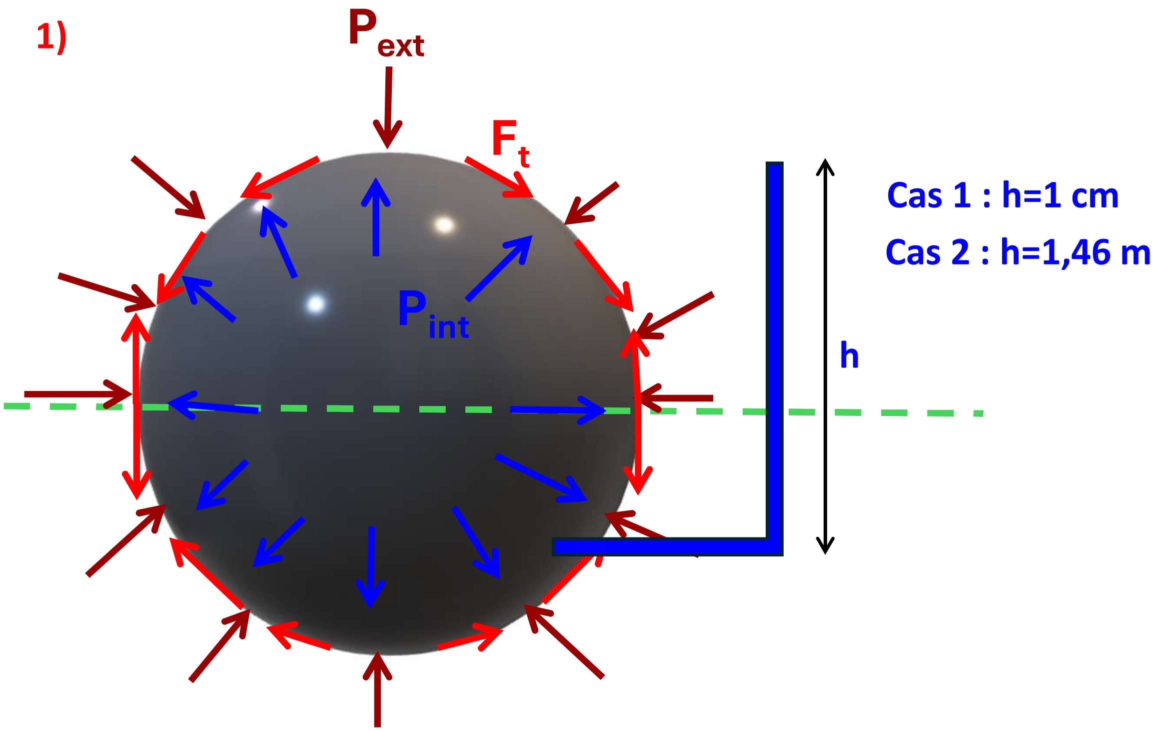
On considère une goutte d'eau sphérique de rayon R, immobile et exposée à l'air. On suppose que la pression est uniforme à l'intérieur de la goutte.

1) Quel est l'état de la pression à l'intérieur de la goutte ?

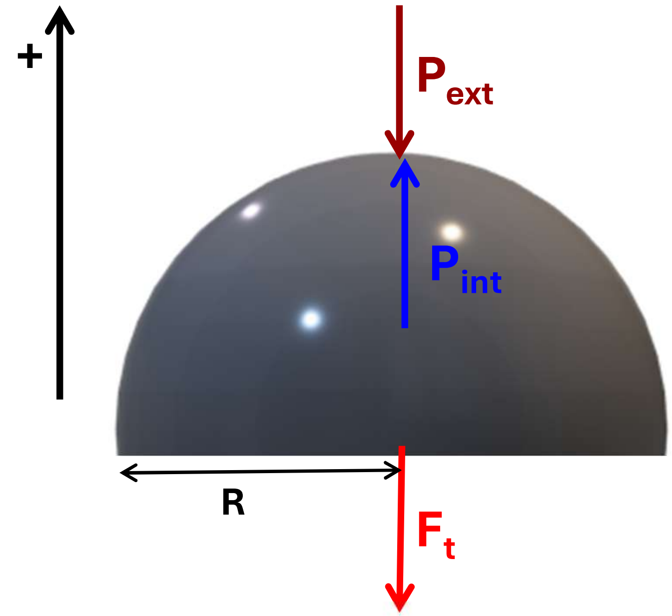
2) Si l'on coupe fictivement la goutte par un plan diamétral, déterminer l'expression reliant la différence de pression $\Delta P = P_{int} - P_{ext}$ et la tension superficielle σ où p_{int} et p_{ext} sont respectivement les pressions à l'intérieur et à l'extérieur de la goutte.

3) Quelle est la hauteur d'eau correspondant à la surpression qui règne dans une goutte d'eau de 3 mm de diamètre et dans une gouttelette de vapeur d'eau de 20 µm de diamètre. Le fluide environnant est l'air.

1)



2)



$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

$$(P_{int} - P_{ext})\pi R^2 = \sigma 2\pi R$$

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$$

En raison de la tension superficielle qui agit sur toute la surface de la goutte et qui tente à réduire son volume , il y aura une surpression à l'intérieur de la goutte.

3) Cas 1 : D=3mm (R=1,5mm) : $\Delta P = 2*0,073/0,0015 = 97,33$ Pa $= 97,33/(\rho_{eau.}\ g) = 97,33/(1000*9,81) =$ **0,01m d'eau**

Cas 2 : D=20 μ (R=10μ) : $\Delta P = 2*0,073/10^{-5} = 14600$ Pa $= 14600/(\rho_{eau.}\ g) = 14600/(1000*9,81) =$ **1,46 m d'eau**