CHAPITRE V

TORSION

5.1 Définitions

Une poutre droite d'axe x est en torsion si son torseur des efforts intérieurs exprimé au point G est se réduit à une composante M_t. M_t est appelé moment de torsion.

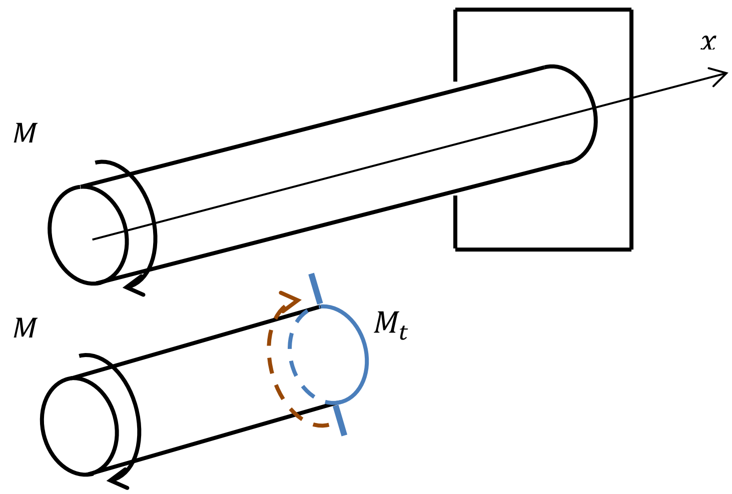

Figure 5.1. Schématisation de la torsion

Exemples : Les tarauds, certaines clefs employées pour le serrage des écrous, les arbres de transmission sont des corps sollicités à la torsion.

L'étude de la torsion présentée ici se limitera au cadre des poutres droites à sections circulaires. Ainsi, les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire. Cette restriction est liée au fait que pour toute section qui n'est pas circulaire, les résultats qui seront présentés sont erronés car :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent,

- la contrainte de cisaillement qui est perpendiculaire au rayon vecteur ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

5.2 Contrainte tangentielle ou de glissement

5.2.1 Angle de torsion

Considérons un arbre de section circulaire soumis à un moment de torsion constant. Coupons un élément infiniment petit de longueur (dx). Sa section avant est soumise à une rotation par rapport à sa section arrière d'angle $d\varphi$. φ est appelé angle de torsion. r étant le rayon de la section droite, l'angle de torsion est lié à l'angle de cisaillement γ par la relation suivante :

$$r\,d\varphi = \gamma dx$$

$$\gamma = r\,\frac{d\varphi}{dx}$$

Le rapport $\frac{d\varphi}{dx}$ représente l'angle de torsion par unité de longueur de l'arbre et se désigne par θ. Ainsi, on écrit :

$$\gamma = r\,\theta$$

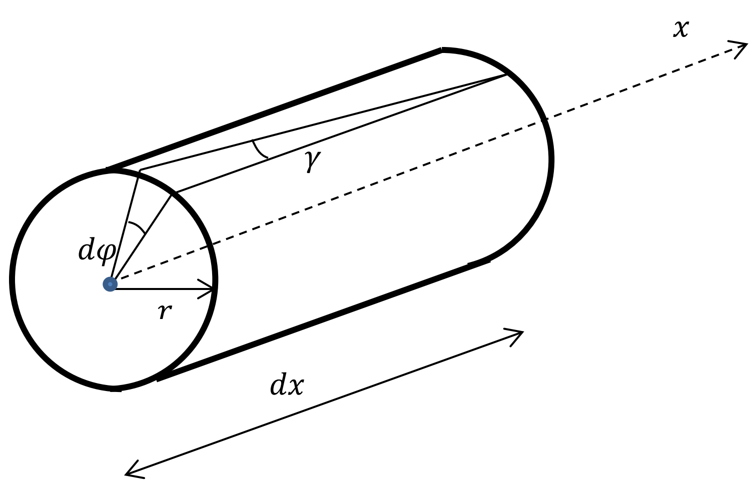

Figure 5.2. Angle de torsion

5.2.2 Contrainte tangentielle

D'après la loi de Hooke, en désignant par G le module de cisaillement, on peut déduire que la contrainte tangentielle τ est égale à :

$$\tau = G\gamma = Gr\,\theta$$

sur une section, les contraintes tangentielles sont orthoradiales : la contrainte est nulle au centre et maximale pour $r = R$.

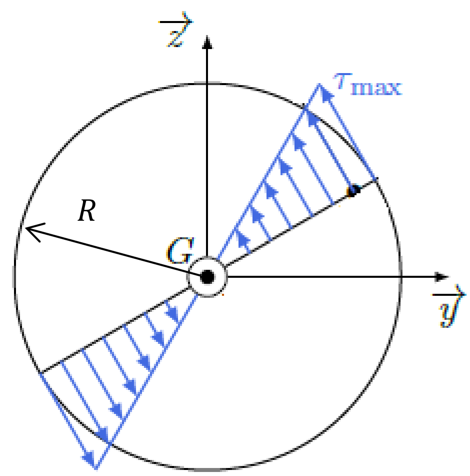

Figure 5.3. Contraintes tangentielles

D'après les conditions d'équilibre de la partie de l'arbre isolée, on conclut que les contraintes de cisaillement réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion M_t. Pour chaque élément d'aire dA, l'effort tranchant est

$$T = \tau dA.$$

Le moment de cet effort par rapport à l'axe de l'arbre est donc :

$$M_t = \int r\tau dA = G\theta\, r^2 dA$$

En intégrant, on obtient :

$$M_t = G\theta I_0$$

Où I_0 est le moment d'inertie polaire de la section droite A.

Ainsi la contrainte tangentielle s'écrit en fonction du moment de torsion comme suit :

$$\tau = \frac{M_t r}{I_0}$$

5.3 Déformation élastique en torsion

A partir de la définition de θ et de la loi de Hooke,

$$\tau = Gr\,\theta = \frac{M_t r}{I_0}$$

on peut écrire :

$$\frac{\tau}{r} = \frac{M_t}{I_0} = G\theta = G\frac{d\varphi}{dx}$$

Soit $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_2$, on aura :

$$\Delta\varphi = \int_{x1}^{x2} \frac{M_t}{GI_0} dx$$

Pour un arbre de longueur l, on en déduit que la torsion totale est :

$$\varphi = \theta l \quad ; \quad \theta = \frac{M_t}{GI_0}$$

5.4 Condition de résistance à la torsion.

Un matériau en torsion reste dans son domaine élastique si la contrainte tangentielle reste inférieure à la limite élastique τ_e.

$$\tau_{max} \leq \tau_e$$

Pour qu'une pièce sollicitée en torsion résiste en toute sécurité, il faut que la contrainte tangentielle soit au plus égale à la résistance pratique au cisaillement τ_p. s étant un coefficient de sécurité, on écrit :

$$\tau_{max} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$