

CHAPITRE V

FLEXION PLANE SIMPLE

6.1 Définitions et hypothèses

6.1.1 Définitions

Une poutre droite d'axe x est en flexion simple autour de z au point si son torseur des efforts intérieurs est égal à :

$$\{\vec{R}_{int}\} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & \mathbf{0} \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}$$

T_y est l'effort tranchant.

M_{fz} est le moment fléchissant.

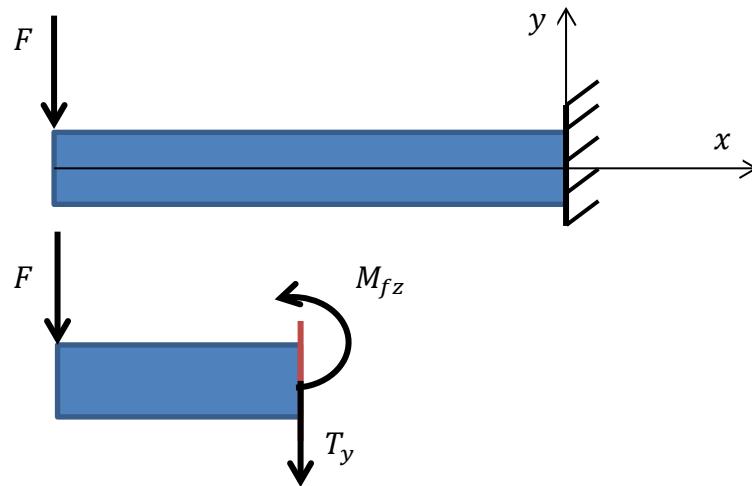


Figure 6.1. Effort tranchant et moment fléchissant

Exemples : Une poutre à son extrémité ou à son milieu, un arbre qui supporte un lourd volant au repos, un pont ou une canne à pêche sont des corps sollicités en flexion.

6.1.2 Hypothèses

L'établissement des formules de la flexion repose sur certaines hypothèses énumérées ci-dessous :

- L'élément poutre est décrit par une surface plane A appelée section droite de centre de gravité G . La ligne moyenne de la poutre est formée par les différentes positions du centre de gravité G de la poutre lorsque l'on parcourt cette dernière selon toute sa longueur l . La poutre admet un plan de symétrie et est formée de fibres jointives parallèles à l'axe x .

- Les déplacements, rotations et déformations sont supposés petits. C'est l'Hypothèse des Petites Perturbations. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli suppose que, pour toutes transformations géométriques, les sections droites d'une poutre restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne.

- L'hypothèse de Barré de Saint Venant suppose que pour une section droite quelconque, suffisamment éloignée du point d'application des efforts extérieurs sur une poutre, les effets de ce même chargement peuvent être remplacés par un torseur équivalent s'appliquant à cette section droite.

Si l'effort tranchant T_y est nul, la flexion est dite pure. Sinon, la flexion est dite simple.

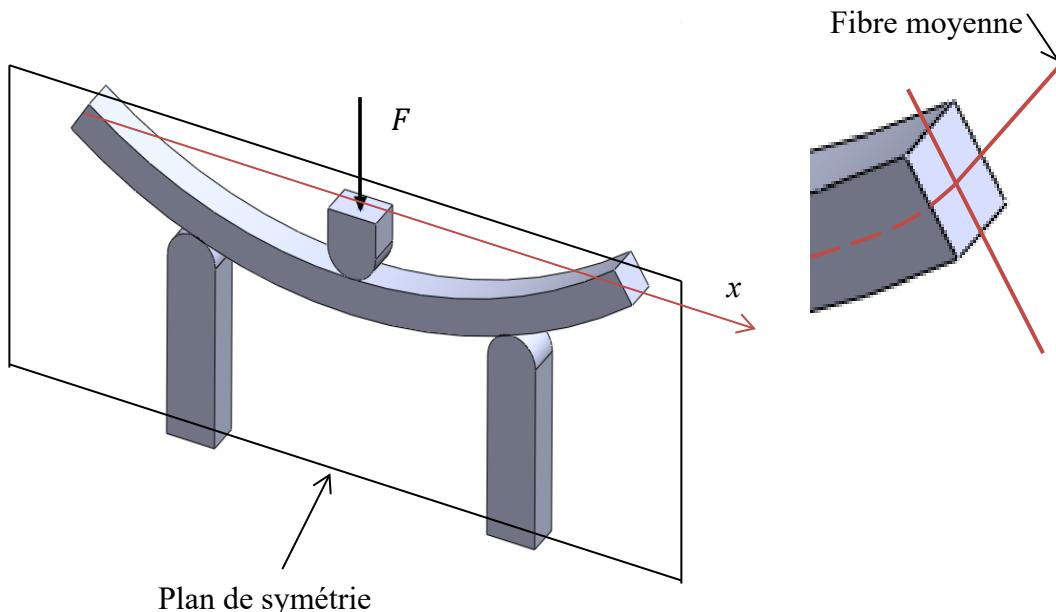


Figure 6.2. Hypothèses de calcul en flexion

6.2 Efforts tranchants et moments fléchissants

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. L'équilibre de la poutre exige que la somme des efforts externes soit nulle. Ainsi les réactions aux appuis A et B doivent être égales à :

$$RA = Fb/L; RB = Fa/L$$

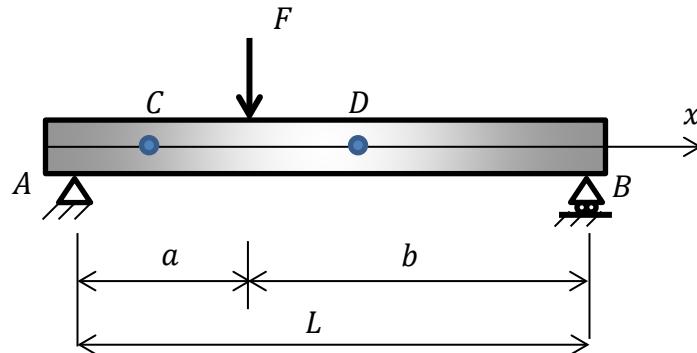


Figure 6.3. Poutre simplement appuyée

Effectuons une coupe au point C divisant la poutre en deux parties notées *gauche* et *droite*. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs et des efforts intérieurs.

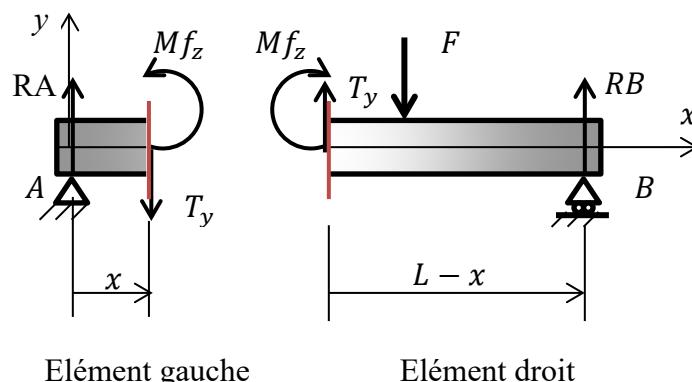


Figure 6.4. Coupe transversale dans la poutre

Pour étudier l'équilibre de l'élément gauche de la poutre, les efforts internes doivent équilibrer les efforts externes. Ainsi, la somme des forces agissant suivant l'axe y doit être nulle.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = RA = Fb/L$$

La somme des moments par rapport au point C doit également être nulle.

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = (Fb/L)x$$

En ce qui concerne l'élément droit, en procédant de la même sorte, on peut écrire

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = F - RB = Fb/L$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = (Fa/L)(L - x) - F(L - x - b) = (Fb/L)x$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant évalués dans l'élément gauche sont identiques à ceux déterminés dans l'élément droit. Ainsi, dans un souci de simplifier les calculs, on prend souvent l'élément le moins compliqué.

6.3 Diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissants

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction $T_y(x)$.

Le diagramme des moments fléchissants est la courbe représentative de la fonction $Mf_z(x)$.

En effectuant une coupe au point C (1ère partie) et une autre au point D (2ème partie).

1^{ère} partie : $0 \leq x \leq a$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = RA = Fb/L$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = (Fb/L)x$$

La fonction $Mf_z(x)$ est linéaire dans l'intervalle ($0 \leq x \leq a$)

$$Mf_z(x = 0) = 0$$

$$Mf_z(x = a) = \frac{Fba}{L}$$

2^{ème} partie : $a \leq x \leq L$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -Fa/L$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow Mf_z = ((Fb/L) - F)x + Fa$$

La fonction Mf_z est linéaire dans l'intervalle ($a \leq x \leq L$)

$$Mf_z(x = a) = \frac{Fba}{L}$$

$$Mf_z(x = L) = 0$$

Les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants peuvent ainsi être tracés le long de la poutre :

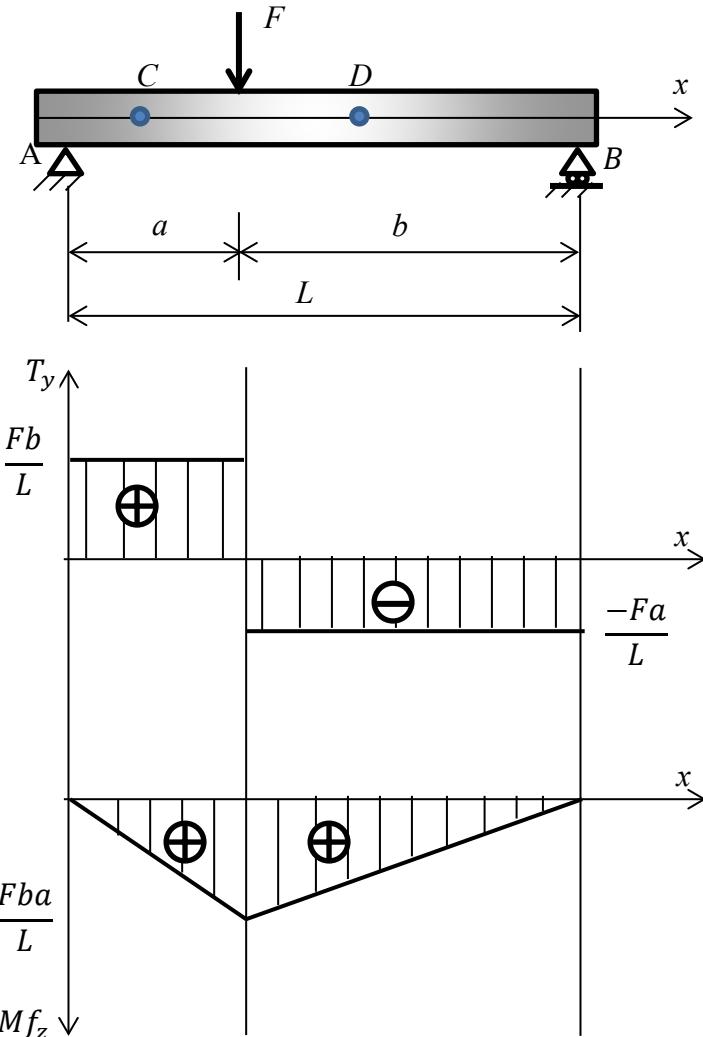


Figure 6.5. Diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant

6.4 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

En considérant un élément de poutre pris entre deux sections infiniment voisines, distantes de dx .

L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par T_y et Mf_z .

L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par $(T_y + dT_y)$ et $(Mf_z + dMf_z)$.

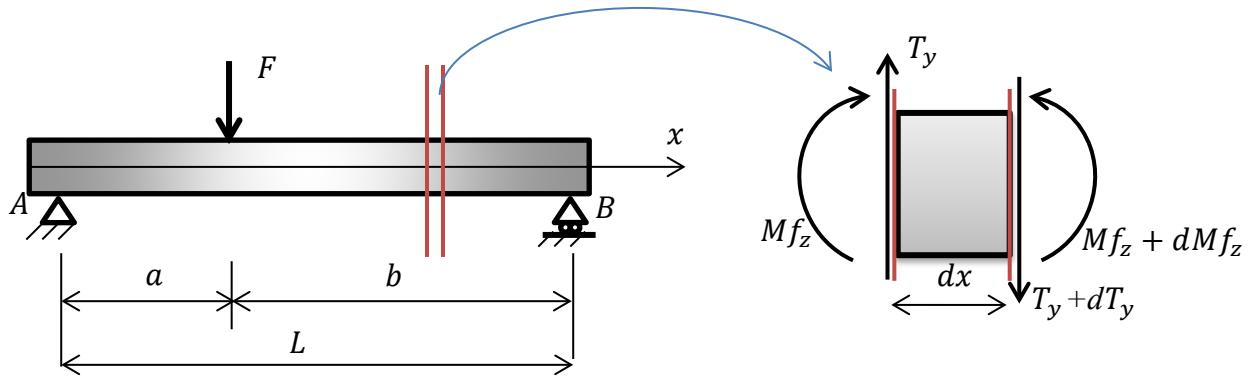


Figure 6.6. Relation moment fléchissant - effort tranchant

En l'absence des efforts externes appliqués sur l'élément de poutre isolé, les efforts tranchants à droite et à gauche de l'élément sont égaux ($dT_y = 0$). Ainsi l'équilibre de l'élément de poutre s'écrit comme suit :

$$Mf_z + T_y dx - (Mf_z + dMf_z) = 0$$

$$T_y = \frac{dMf_z}{dx}$$

Il en résulte que le long de la poutre, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse x du moment fléchissant.

6.5 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (flèche)

Soit une poutre droite d'axe x , on désigne par flèche, notée u_y , à l'abscisse x_n le déplacement suivant y du centre de gravité de la section A_n droite correspondant à l'abscisse x_n . Les positions finales des centres de gravité des sections droites le long de la poutre constituent la déformée de la poutre.

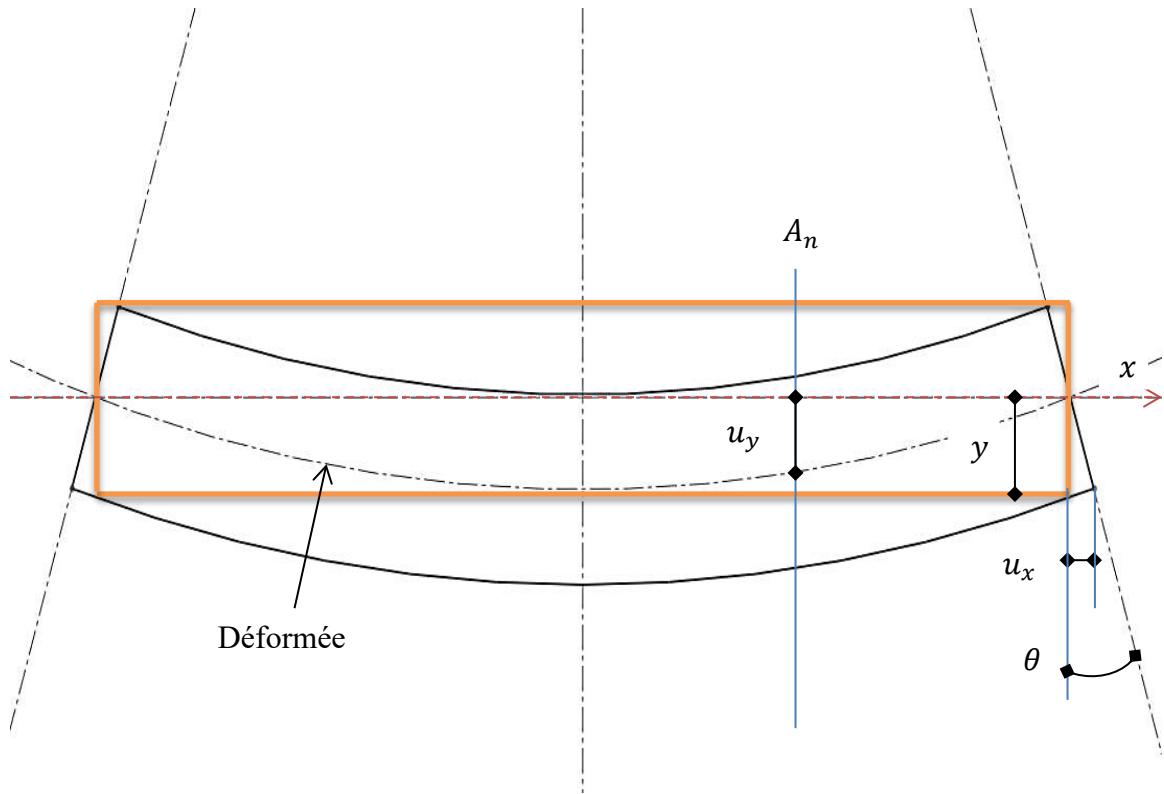


Figure 6.7. Déformée de la poutre

En supposant que les déformations sont petites (hypothèses de petites déformations), \$u_x\$ étant le déplacement longitudinal, la déformation longitudinale \$\varepsilon\$ s'exprime par :

$$\varepsilon = \frac{du_x}{dx}$$

L'angle de rotation \$\theta\$, étant supposé petit, il prend la forme :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{u_x}{y} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{d\theta}{dx} y$$

Le moment fléchissant \$M_f\$ dans une section d'abscisse \$x\$ s'exprime en fonction de la contrainte \$\sigma\$ par l'intégrale :

$$M_f = \int_A \sigma y dA$$

Utilisant la loi du comportement élastique ($\sigma = E\varepsilon$) uniaxiale reliant la contrainte et la déformation, on peut écrire :

$$Mf_z = - \int_A E \frac{d\theta}{dx} y^2 dA$$

En intégrant, I_z étant le moment d'inertie de la section, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{Mf_z}{EI_z}$$

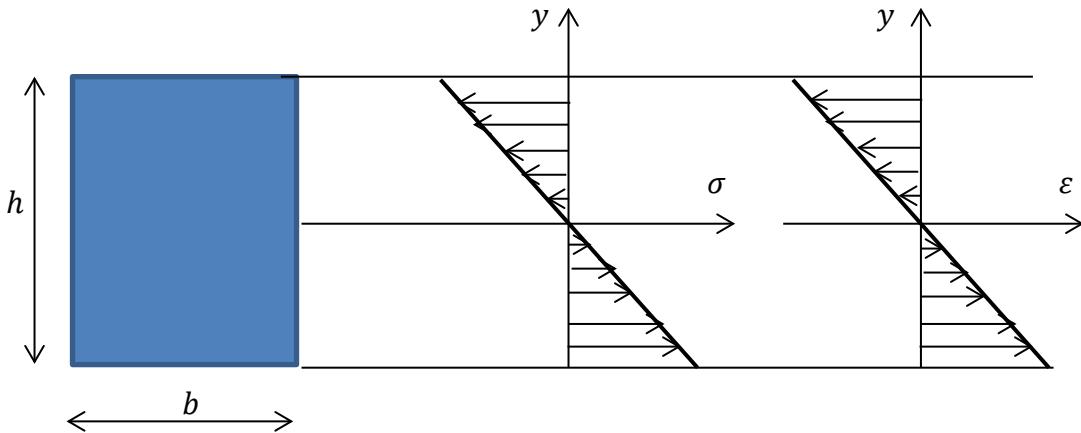


Figure 6.8. Répartition des contraintes et des déformations normales

Par ailleurs, l'angle de rotation peut prendre, selon l'hypothèse de petits déplacements la forme suivante :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{du_y}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{Mf_z(x)}{EI_z}$$

C'est l'équation différentielle de la déformée.

6.6 Calcul des contraintes et dimensionnement.

6.6.1 Contraintes

La loi de Hooke établit une relation linéaire entre la contrainte et la déformation. Dans le cas de la flexion, les contraintes se réduisent à des contraintes normales et des contraintes tangentialles.

6.6.1.1 Contraintes normales

En flexion pure, la poutre étant si élancée que le cisaillement transverse est négligé, les contraintes normales s'expriment alors par :

$$\sigma = E\varepsilon$$

Remplaçant la déformation par sa formule $(\varepsilon = -\frac{Mf_z}{EI_z}y)$, on obtient :

$$\sigma = -\frac{Mf_z}{I_z}y$$

On remarque que la contrainte prend un aspect linéaire en fonction de l'épaisseur de la poutre. Ainsi, elle est nulle au niveau de la fibre moyenne tandis qu'elle prend ses valeurs maximales et minimales sur les fibres externes.

6.6.1.2 Contraintes tangentielles

Dans le cas de la flexion simple, le cisaillement transverse est pris en compte. Ainsi, en plus de la contrainte normale σ , se génère une contrainte tangentielle τ dont la valeur est donnée par la formule :

$$\tau = \frac{T_y W_z}{I_z b}$$

W_z représente le moment statique de la région en bleu de la section par rapport à la fibre moyenne.

b est la largeur de poutre à l'endroit où est calculée la contrainte tangentielle.

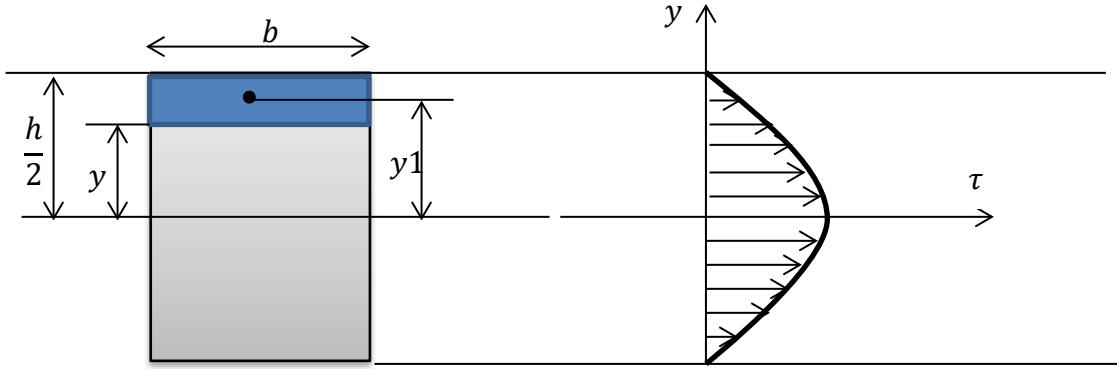


Figure 6.8. Répartition des contraintes tangentielles

Dans le cas d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h , le moment d'inertie et le moment statique sont donnés par :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} ; \quad Ms_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

6.6.2 Dimensionnement

En l'absence du cisaillement transverse, le dimensionnement d'une poutre en flexion passe par les étapes suivantes :

- Détermination de la section dangereuse à partir du diagramme du moment fléchissant le long de la poutre.
- Evaluation de la contrainte maximale σ_{max} dans la section dangereuse.
- Vérification de la condition de résistance qui s'écrit comme suit :

$$\sigma_{max} = -\frac{M f_{z_{max}}}{I_z} y_{max} \leq \frac{\sigma_e}{s} = \sigma_p$$

s est le coefficient de sécurité ; σ_e , la limite élastique du matériau et σ_p , la résistance pratique du matériau.

En prenant en compte le cisaillement transverse, on utilise généralement le critère de la contrainte tangentielle maximale (critère de Coulomb) ou le critère de l'énergie potentielle de déformation qui ont, respectivement, les deux expressions suivantes :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Ainsi, la condition de résistance s'écrit :

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_p$$