Département de Mathématiques — Université de Jijel

$2^{ème}$ *ANNÉE LICENCE* — 2025 – 2026

TD n°4

Exercice 1 Montrer que le système de connecteurs $\{\neg, \vee\}$ est un système complet.

Exercice 2 Montrer que $\neg p$ est une conséquence logique de l'ensemble des formules suivant

$$\{(r \Rightarrow \neg q), (r \vee s), (s \Rightarrow \neg q), (p \Rightarrow q)\}$$

Exercice 3 Mettez les parenthèses aux formules suivantes:

1. $p \wedge r \wedge \neg q \Rightarrow p \vee q \wedge r$.
2. $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r$.
3. $p \vee q \Rightarrow r \leftrightarrow r \wedge p \wedge r \vee p \wedge q \Rightarrow \neg r$

Exercice 4 Considérons les raisonnements suivants:

R_1):" Si hier soir vous n'avez pas dormi alors vous allez dormir durant le cours. Hier soir vous n'avez pas dormi. Par conséquent, vous allez dormir durant le cours."

R_2) "Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean nest pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti".

En utilisant les règles d'inférence, montrer que ces raisonnements sont vrai.

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Formaliser les phrases suivantes en logique des prédicats.

1. f est bornée.
2. f est majorée.
3. f est inférieur à g.
4. f ne s'annule jamais.
5. g n'est pas la fonction nulle.
6. Dans un triangle isocèle une médiane est également hauteur.

Exercice 6 On modélise sommairement le système solaire par le modèle suivant. Le domaine pris en compte contient les neuf planètes et le Soleil.
On se donne les constantes suivantes : s_0: le Soleil, m_1: Mercure, v: Vénus, t: la Terre, l: la Lune, m_2: Mars, j: Jupiter; s_1: Saturne ; u: Uranus ; n: Neptune, p: Pluton. Cet ordre représente la proximité relative par rapport au Soleil (Pluton est la plus éloignée et Mercure la plus proche).

- $P(x)$: x est une planète (du système solaire);
- $T(x)$: x tourne autour de la Terre;

- $M(x, y)$: x est plus petit (ou aussi grand) que y;
- $S(x, y)$: x est plus proche (ou à égale distance) du Soleil que y.

Formaliser les phrases suivantes en logique des prédicats.

1. Vénus est une planète.
2. Le Soleil n'est pas une planète.
3. Le Soleil tourne autour de la Terre.
4. Certaines planètes sont plus petites que la Terre.
5. Toutes les planètes sont plus petites que Saturne.
6. Rien n'est plus petit que la Lune.
7. Si le Soleil tourne autour de la Terre, alors il est plus petit que celle-ci.
8. La Lune est une planète mais certaines choses ne sont pas des planètes.

Exercice 7 Déterminer parmi les prédicats suivants, lesquelles sont vrais

1. $\exists x \in \mathbb{R}$, $(x + 1 = 0$ et $x + 2 = 0)$.
2. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x + 1 \neq 0$ ou $x + 2 \neq 0)$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^* : z - xy = 0$.
5. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^* : z - xy = 0$.
6. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^* : z - xy = 0$.
7. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$.
8. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, |a| < \varepsilon$.

Exercice 8 Dans les formules suivantes, indiquer quelles occurrences de variables sont libres (resp. liées et par quel quantificateur).

1. $\forall x p(x) \Rightarrow \exists x r(x, y)$.
2. $\forall x \exists y \forall x (p(x, y) \Rightarrow \exists x p(x, y))$.
3. $\forall x ((p(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x p(x, y)) \Rightarrow r(x, x))$.
4. $\forall x (\exists y p(x, y) \wedge q(x, z)) \wedge r(x)$
5. $\forall x ((\exists y q(x, y)) \wedge p(x, y, z))$.
6. $\forall x \exists y (p(x, y) \wedge \forall z r(x, y, z))$. (Close)
7. $(\forall x p(x, y, z) \vee \forall z (p(z) \Rightarrow r(z)))$.
8. $(\forall x A(x) \vee \exists x (B(x) \Rightarrow \neg \exists t C(x, t)))$.

Exercice 9 Trouver le champ (la portée) de chaque quantificateur dans les formules suivantes:

1. $\forall x \exists (p(x, y) \wedge \exists z q(x, z))$
2. $\forall x (\exists x p(x) \Rightarrow q(x))$
3. $\forall x p(x) \Rightarrow \exists y p(y)$