RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Université Mohammed Seddik BenYahia - Jijel**

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Chimie

# Thème

**Cours Mathématiques Appliquées**

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le but de ce cours est de généraliser la notion de somme finie de termes en étudiants comment cette dernière se comporte lorsque l'on considère une succession infinie de termes. La clé sera de considérer ces sommes infinies, aussi appelées, comme la limite de suite.

Le premier chapitre de ce cours est consacré essentiellement à l'étude des séries numériques, nous commençons par donner quelques définitions et propriétés pour mieux comprendre la suite de ce chapitre, ensuite nous étudions, les séries à termes positifs avec ces critères de convergence, les séries à termes quelconques ainsi que leurs critères de convergence.

CHAPITRE 1

# SÉRIES

## 1.1 Séries numériques

### 1.1.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.1.1.**

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On appelle série de terme général $u_n$, et on note $\sum\limits_n u_n$ ou $\sum u_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$ :*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

$S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2, ...$

- *On dit que la série $\sum\limits_n u_n$ converge vers $S$ si et seulement si la suite des sommes partielles, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, dans se cas $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = S$ est appelée somme de la série $\sum\limits_n u_n$, et désignée par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
- *Une série est dite divergente si elle est n'est pas convergente.*

**Exemple 1.** ***1) Série géométrique :***

*Le terme général d'une série géométrique est $u_n = r^n$. Les sommes partielles ont* *une expression explicite :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1 & si\ r = 1 \\ \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & si\ r \neq 1 \end{cases}.$$

$$Et\ sa\ somme\ S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & si\ |r| \prec 1 \\ pas\ de\ limite & si\ r \leq -1 \\ +\infty & si\ r \succeq 1 \end{cases}$$

***2)*** *Voici un exemple de série dont les sommes partielles sont explicitement calculables :* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$

*En effet :* $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$

*donc* $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2},$

*et* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$

***3)*** *Série de terme général :* $u_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ $(n \succeq 0)$, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite numérique, alors :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (\varphi_{k+1} - \varphi_k) = \varphi_{n+1} - \varphi_0,$$

*donc : la suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *sont de même nature. De plus si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = l \Leftrightarrow$ *la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *est convergente et*

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = l - \varphi_0$$

### 1.1.2 Reste d'une série convergente

Si la série de terme général $u_n$ est convergente, et de somme $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, la différence $S - S_n$ s'appelle reste d'ordre $n$ de la série. On le note :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**Proposition 1.1.1.** *Si la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0.$

*En effet :* $R_n = S - S_n$, *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S - S_n) = S - S = 0$

*( car la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge et* $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *)*

**Théorème 1.1.1.**

*Si la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers zéro, c'est-à-dire*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée : une série dont le terme général ne tend pas vers zéro ne peut pas converger.

**Preuve 1.1.1.** *On a* $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = S_{n-1} + u_n$, *d'où*

$u_n = S_n - S_{n-1}$. *Si la série converge, la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge, et donc*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

**Remarque 1.1.1.** *Cette condition est une condition nécessaire qui n'est pas suffisante, car il existe des séries divergentes et dont les termes généraux tendent vers zéro à l'infinie*

**Contre exemples**

**1)** La série $\sum\limits_{n\succeq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est une série divergente, car

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

bien que la limite de son terme général est nulle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

**2)** La série $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{1}{n}$, dite série harmonique, est une série divergente, bien que son terme général $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$,

En effet : on a

$$\forall k \succeq 1, \frac{1}{k} \succeq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt \Rightarrow \forall k \succeq 1 \frac{1}{k} \succeq \ln(k+1) - \ln(k)$$

i.e

$$\begin{cases} 1 \succeq \ln 2 - \ln 1 \\ \frac{1}{2} \succeq \ln 3 - \ln 2 \\ \frac{1}{n} \succeq \ln(n+1) - \ln n \end{cases}$$

D'où

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \succeq \ln(n+1) - \ln n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \succeq \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

ce qui montre que la série harmonique diverge.

**Proposition 1.1.2.**

*Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1}-a_n)$ converge, i.e*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite convergente} \Leftrightarrow \sum_{n\succeq 0}(a_{n+1}-a_n) \text{ une série convergente}$$

**Exemple 2.** *1) Soit la série $\sum_{n\succeq 1}\frac{1}{n(n+1)}$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.*

*La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $a_n = \frac{1}{n}$ converge, donc la série $\sum_{n\succeq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge, en plus :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

## 1.1.3 Propriétés et opérations sur les séries

**Proposition 1.1.3.** *Soient $\sum_{n\succeq 0}u_n$ et $\sum_{n\succeq 0}v_n$ deux séries, on suppose qu'elles ne diffèrent que par un nombre fini de termes ( i.e il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\succeq p$ on a $u_n = v_n$ ), alors les deux séries sont de même nature.*

**Preuve 1.1.2.** *Soit $n\succeq p$, posons :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{k=0}^{p}u_k + \sum_{k=p+1}^{n}u_k = S_p + \sum_{k=p+1}^{n}u_k, \\ T_n &= \sum_{k=0}^{n}v_k = \sum_{k=0}^{p}v_k + \sum_{k=p+1}^{n}v_k = T_p + \sum_{k=p+1}^{n}v_k. \end{aligned}$$

*La différence $S_n - T_n = S_p - T_p$ est une constante, alors $\sum_{n\succeq 0}u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n\succeq 0}u_n$ converge*

**1)** Cette proposition permet de dire que les séries sont de même nature ( on parle de nature d'une série pour désigner sa convergence ou sa divergence ) mais en cas de convergence, elle n'ant pas nacéssairement la même

**2)** On ne change pas la nature d'une série si on lui rajoute ou on lui retranche un nombre fini de termes.

**3)** Les sommes partielles d'une série sont toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série converge.

**Proposition 1.1.4.** *Soient* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ *deux séries numériques et* $\alpha$ *un scalaire non nul :*

*a) Si la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge vers* $S$, *et la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ *converge vers* $T$, *alors la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} (u_n + v_n)$ *converge vers* $(S+T)$

*b) Si la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge vers* $S$, *alors la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} \alpha u_n$ *converge vers* $\alpha S$

*c) Si la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge, et la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ *diverge, alors la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} (u_n + v_n)$ *diverge*

**Remarque 1.1.2.** *Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leu somme.*

**Exemple 3.** *1) La série* $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{1}{n}$ *et* $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{1}{(n+1)}$ *divergent, et pourtant on a montré que* $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge.*

*2) Soient* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ *telles que :*$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 \end{cases}$,

*les deux séries divergent, mais la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} (u_n + v_n)$ *converge.*

*3) Soient* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ *telles que :*$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \end{cases}$,

*les deux séries divergent, mais la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} (u_n + v_n)$ *diverge.*

Pour les séries à termes complexes la convergence équivantà celle des parties réelles et imaginaires.

**Proposition 1.1.5.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de complexes. Pour tout* $n$, *notons* $a_n$ *et* $b_n$ *la partie réelle et la partie imaginaire de* $u_n$.

*La série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge si et seulement si les deux séries* $\sum\limits_{n\succeq 0} a_n$ *et* $\sum\limits_{n\succeq 0} b_n$ *convergent. Si est le cas, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

**Preuve 1.1.3.** *Rappelons qu'une suite de complexes converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent. Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites de réels :*

$$\left( \lim_{n\to+\infty} A_n = A \text{ et } \lim_{n\to+\infty} B_n = B \right) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (A_n + iB_n) = A + iB.$$

*Il suuffit d'appliquer ce résultat à :*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,$$

*car la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles, et la partie imaginaire d'une somme est la somme des parties imaginaires.*

*Considérons par exemple la série géométrique* $\sum\limits_{n\succeq 0} r^n$*, où* $r$ *est un complexe de module* $\rho \prec 1$ *et d'argument* $\theta$ : $r = \rho e^{i\theta}$

*Pour tout* $n$, $r^n = \rho^n e^{in\theta}$*. Les parties réelles et imaginaires de* $r^n$ *sont :*

$$a_n = \rho^n \cos n\theta \text{ et } b_n = \rho^n \sin n\theta.$$

*On déduit de la proposition précédente que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = Re\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = Im\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

*Le calcul donne :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos n\theta = \frac{1-\rho\cos\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin n\theta = \frac{\rho\sin\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}$$

### 1.1.4 Séries à termes positifs

**Définition 1.1.2.** *On appelle* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *une série à termes réels positifs toute série vérifiants :* $u_n \succeq 0$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

*Les séries vérifiants :* $u_n \succeq 0$*, pour tout* $n \succeq n_0$ *sont aussi appelées séries à termes positifs car la nature d'une série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes.*

*Si on note* $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$*, alors* $S_n - S_{n-1} = u_n$*. Donc la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, ce qui entraîne que : si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée alors elle est converge ( i.e la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *converge), et si* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ *et la série* $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ *diverge.*

**Proposition 1.1.6.** *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

### 1.1.5 Comparaison d'une série et d'une intégrale

**Théorème 1.1.2.** *( **de comparaison avec son intégrale** )*

*Une série dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$ ; où $f$ est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 ; est de meme nature que la suite $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e*

$$\sum_{n\succeq 0} u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx \text{ existe.}$$

**Remarque 1.1.3.** *La condition $u_n = f(n)$ ; où $f$ est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 n'a pas besoin d'être vraie à partir de $n = 1$, il suffit qu'elle soit vérifiée à partie d'un certain rang.*

*La fonction $f$ positive peut être remplacée par une fonction de signe constant.*

**Exemple 4.** $<$***Série de Riemann***$>$

*Une série dite de Riemann est de la forme $\sum\limits_{n\succ 0}\frac{1}{n^\alpha}$.*

*1) Si $\alpha \preceq 0$ : La série de Riemann $\sum\limits_{n\succ 0}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = +\infty \neq 0$.*

*2) Si $\alpha \succ 0$ : $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = f(n), \forall n \succeq 1$, $f$ est positive, décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$. D'après le théorème de comparaison avec son intégrale, la série $\sum\limits_{n\succ 0}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx$ existe.*

*Or $\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right]$*

*Si $\alpha = 1$ : $\int_1^n f(x)\,dx = \ln n$.*

*Donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & si\ \alpha \succ 1 \\ +\infty & si\ \alpha \preceq 1 \end{cases}$.

***Résultat :*** *La série de Riemann $\sum\limits_{n\succ 0}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha \succ 1$, et diverge si $\alpha \preceq 1$.*

### 1.1.6 Critères de comparaison

**Théorème 1.1.3.** *( **De comparaison de deux séries à termes positifs** )*

*Soient $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ deux séries à termes positifs on nuls. On suppose qu'il existe $n_0 \succeq 0$, tel que pour tout $n \succeq n_0$, $u_n \preceq v_n$.*

** Si $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ converge.*

** Si $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ diverge.*

**Exemple 5.** *Soit la série $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{|\cos n|}{n^2}$, son terme général $u_n = \frac{|\cos n|}{n^2} \preceq \frac{1}{n^2}$.*

*Or $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge aussi.*

**Théorème 1.1.4.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$.*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

*Alors les séries $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ sont de même nature ( convergentes ou divergentes )*

**Preuve 1.1.4.** *Par hypothèse, pour tout $\varepsilon \succ 0$ il existe $n_0$ tel que pour tout $n \succeq n_0$,*

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \Leftrightarrow (1-\varepsilon)\, v_n \prec u_n \prec (1+\varepsilon)\, v_n.$$

*Fixons $\varepsilon \prec 1$, si $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ converge, alors par le théorème de comparaison $\sum\limits_{n\succeq 0} (1-\varepsilon)\, v_n$ converge, donc $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ également.*

*Réciproquement, si $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ diverge, alors $\sum\limits_{n\succeq 0} (1+\varepsilon)\, v_n$ diverge aussi.*

*Par exemple : $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{n^2+3n+1}{n^4+2n^3+4}$ converge, $\sum\limits_{n\succ 0} \frac{n+\ln n}{n^3}$ converge.*

*Dans les deux cas, le terme général équivalent à $\frac{1}{n^2}$, et nous avons vu que la série $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Par contre*

*$\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2n^2+4}$ diverge, $\sum\limits_{n\succ 0} \frac{n+\ln n}{n^2}$ diverge.*

*Dans les deux cas, le terme général équivalent à $\frac{1}{n}$, et nous avons vu que la série harmonique $\sum\limits_{n\succeq 1} \frac{1}{n}$ diverge.*

**Résultat :**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\sum\limits_{n\succeq 0} v_n$ converge, alors $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ converge.

**Résultat : Série de Bertrand**

La série de Bertrand $\sum\limits_{n\succ 1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est :

$$\forall \beta : \begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha \succ 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \prec 1 \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$ :

$$\begin{cases} \sum\limits_{n \succ 1} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \text{ converge} & \text{si } \beta \succ 1 \\ \sum\limits_{n \succ 1} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}} \text{diverge} & \text{si } \beta \prec 1 \end{cases}$$

### 1.1.7 Critères de Cauchy et d'Alembert

Rappelons tout d'abord que la série géométrique converge si $|r| \prec 1$, diverge sinon. les critères de Cauchy et d'Alembert permettent de comparer une série à termes positifs avec les séries géométriques

**Théorème 1.1.5.** *( Critère de Cauchy )*

*Soit* $\sum\limits_{n \succeq 0} u_n$ *une série à termes positifs on nuls. Notons* $k = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n}$ *tel que* $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ .

- *Si* $k \prec 1$ *la série* $\sum\limits_{n \succeq 0} u_n$ *converge.*
- *Si* $k \succ 1$ *la série* $\sum\limits_{n \succeq 0} u_n$ *diverge.*
- *Si* $k = 1$ *cas de doute on ne peut pas conclure*

**Exemple 6.** *La série* $\sum\limits_{n \succ 0} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *converge si* $a \succ 0$ *et diverge si* $a \prec 0$ *car*

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n} = e^{-a}$

- *Si* $a \succ 0$ *la série* $\sum\limits_{n \succ 0} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *converge,*

- *Si* $a \succ 0$ *la série* $\sum\limits_{n \succ 0} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *diverge,*

- *Si* $a = 0$, $u_n = 1$ *la série* $\sum\limits_{n \succ 0} 1$ *diverge.*

**Remarque 1.1.4.** *Le critère de Cauchy ne s'applique ni aux séries de Riemann, ni aux séries de Bertrand car :*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{-\alpha} (\ln)^{-\beta}} = 1.$$

**Théorème 1.1.6.** *( Critère de d'Alembert )*

*Soit* $\sum\limits_{n \succeq 0} u_n$ *une série à termes positifs pour tout entier* $n_0$, *telle que* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *est de limte* $k$ *quand* $n \to +\infty$.

- *Si* $k \prec 1$ *la série* $\sum\limits_{n \succeq 0} u_n$ *converge.*

- *Si $k \succ 1$ la série $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ diverge.*
- *Si $k = 1$ cas de doute on ne peut pas conclure*

**Exemple 7.** *Pour tout réel positif $r$, la série exponoentielle $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{r^n}{n!}$ converge.*

*En effet : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1}$ tend vers $0 \prec 1$.*

- $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ *diverge car* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$ *tend vers* $4 \succ 1$.

**Proposition 1.1.7.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.*

*Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$.*

### 1.1.8 Séries à termes quelconques

*** Séries absolument convergentes**

Quand une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'examiner la série des valeurs absolue, ou des modules s'il s'agit des nombres complexes.

**Définition 1.1.3.** *On dit que la série $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ est absolument convergente si la série $\sum\limits_{n\succeq 0} |u_n|$ converge.*

**Exemple 8.** *La série $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{(-1)^n e^{in}}{n^2+n}$ converge absolument car le module du terme général est égal à $\frac{1}{n^2+n}$ qu'on peut majorer par $\frac{1}{n^2}$.*

*La série $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ n'est pas converge absolument car :*

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \succeq \frac{1}{n+1}$$

*et $\sum\limits_{n\succeq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge .*

**Théorème 1.1.7.** *Une série absolument convergente est convergente.*

**Définition 1.1.4.** *On dit que la série $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ est semi convergente lorsque $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ converge mais $\sum\limits_{n\succeq 0} |u_n|$ diverge.*

**Séries alternées**

**Définition 1.1.5.** *On appelle $\sum\limits_{n\succeq 0} u_n$ série alternée une série dont le terme général est alternativement positif puis négatif c-à-d $u_n = (-1)^n v_n$ tel que $v_n \succeq 0, \forall n \succeq 0$.*

**Corollaire 1.1.1.** *( Critère de Leibniz )*

*Toute série alternée* $\sum\limits_{n\succeq 0}(-1)^n v_n$ *dont la valeur absolue du terme général ( i.e* $v_n$ *) décroit vers* $0$ *est convergente.*

**Exemple 9.** *La série* $\sum\limits_{n\succeq 0}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ *est une série alternée convergente pour* $\alpha\succ 0$*, car :* $u_n=(-1)^n v_n/v_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$.

$\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)_{n\succ 0}$ *est une suite positive, décroissante pour* $\alpha\succ 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$ *pour* $\alpha\succ 0$

## 1.2 Suites et séries de fonctions

Dans toute cette partie, $\Bbbk$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.On s'intéresse à la convergence et propriétés des suites et séries de fonctions définies sur une même partie non vide $D$ de $\Bbbk$, et à valeurs dans $\Bbbk$.

## 1.3 Suites de fonctions

### 1.3.1 Convergences (simple et uniforme d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

**Définition 1.3.1.** *(Convergence simple)*

*Soit* $f$ *une application de* $D$ *dans* $\mathbb{C}$*. On dit que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* $f$ *si pour tout* $x\in D$*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$*. On dit aussi que* $f$ *est la limite simple de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

*Autrement dit, la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* $f$ *si pour tout* $x\in D$*, on a*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}\ \textit{tel que}\ \forall n\geq n_0,\ \textit{on ait}\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

*où* $n_0$ *dépend de* $\varepsilon$ *et de* $x$*.*

**Définition 1.3.2.** *(Convergence uniforme)*

*Soit $f$ une fonction de $D$ dans $\mathbb{C}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $D$ si*

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

*On dit aussi que $f$ est la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

*Autrement dit, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}\text{ tel que }\forall n\geq n_0,\text{ on ait }|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.\forall x\in D,$$

*où $n_0$ dépend de $\varepsilon$, mais ne dépend pas de $x$.*

**Exemple 10.** *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$\begin{array}{rcl} f_n & : & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+nx^2}, n\in\mathbb{N}. \end{array}$$

1. *Convergence simple :*

- *Pour $x=0$ :*

$$f_n(0)=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}f_n(0)=0.$$

- *Pour $x\neq 0$ : $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=1$.*

*Donc $(f_n)$ converge simplement vers la fonction $f$ définie par :*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x=0, \\ 1 & si\ x\neq 0. \end{cases}$$

2. *Convergence uniforme sur $[a,+\infty[\,,a>0$ :*

*On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $x\geq a$*

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|1-\frac{nx^2}{1+nx^2}\right|=\frac{1}{1+nx^2}\leq\frac{1}{1+na^2},$$

*or, on a pour tout $\varepsilon>0$*

$$\frac{1}{1+na^2}<\varepsilon\Leftrightarrow n\geq\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}.$$

*Donc il suffit de prendre* $n_0 = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}\right] + 1$ *pour avoir* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. *Par conséquent :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}\right] + 1 \text{ tel que } n \geq n_0 \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, +\infty[\,.$$

*D'où la convergence uniforme de* $(f_n)$ *sur tout intervalle* $[a, +\infty[\,, a > 0$.

3. *Convergence uniforme sur* $[0, a[\,, a > 0$ *: (Dans quel cas il y aura la convergence uniforme sur* $[0, +\infty[$*).*

*Supposons qu'il en soit ainsi, alors :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0, \text{ on ait } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, a[\,.$$

*Quand* $a \to 0$, $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2} \to +\infty$, *donc il n'existe pas* $n_0$ *ne dépendant pas de* $x$ *d'où la convergence uniforme n'existe pas sur tout intervalle qui contient* $0$.

**Proposition 1.3.1.** *(La convergence uniforme entraîne la convergence simple)*

*Si une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergence uniformément sur* $D$ *vers la fonction* $f$*, alors la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $D$ *vers* $f$.

## 1.3.2 Propriétés des suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie $D$ de $\Bbbk$ qui converge uniformément sur $D$ vers une fonction $f : D \to \Bbbk$, nous allons voir que, dans une certaine mesure, les propriétés de régularité des $f_n$ (continuité, dérivabilité, intégrabilité, etc) sont héritées par $f$.

On rappelle qu'une fonction $f : D \to \Bbbk$ est continue en $x_0 \in D$ si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

ou, de manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$ avec $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Théorème 1.3.1.** *(Continuité d'une limite uniforme)*

*Soit $D$ une partie de $\Bbbk$ et $f_n : D \to \Bbbk$ une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction $f : D \to \Bbbk$. Soit $x_0 \in D$. Si les $f_n$ sont continues en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

*En particulier, si les $f_n$ sont continues sur $D$, alors $f$ est continue sur $D$.*

**Exemple 11.** *Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0, \\ nx & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & si\ x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

*Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}^*$?*

*On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

- *Si $x = 0$ :*

$$f_n(0) = 0, \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f_n(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f_n(x) = 0,$$

*donc $f_n$ est continue en $0$.*

- *Si $x = \frac{1}{n}$ :*

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{n}} f_n(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} \frac{1}{n}} f_n(x) = 1,$$

*donc $f_n$ est continue en $\frac{1}{n}$, d'où $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Vu le résultat, $f_n$ converge simplement vers $f$ tel que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0, \\ 1 & si\ x > 0. \end{cases}$$

*De plus*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 0, \lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1 \neq f(0),$$

*donc $f$ n'est pas continue au point $0$, ce qui montre d'après le théorème précédent que $f_n$ ne converge pas uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$, $a > 0$.*

**Théorème 1.3.2.** *(Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues)*

*Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f_n : [a, b] \to \Bbbk$ une suite de fonctions continues uniformément convergente vers une fonction (continue) $f : [a, b] \to \Bbbk$. Alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Preuve 1.3.1.** *Soit* $\varepsilon > 0$*. Comme* $f_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers* $f$*, il existe* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que* $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$*, pour tout* $x \in [a, b]$ *et pour tout* $n \geq n_0$*.*

*Soit* $n \geq n_0$*, on a (en utilisant la monotonie de l'intégrale) :*

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon,$$

*et donc*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]\,dx\right| < \varepsilon,$$

*d'où*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Remarque 1.3.1.** *La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une limite et d'une intégrale :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

**Corollaire 1.3.1.** *(Primitive d'une limite uniforme)*

*Sous les hypothèses du théorème précédent, soit* $x_0 \in [a, b]$ *et notons pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $F_n : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ *et* $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ *les primitives de* $f_n$ *et de* $f$ *respectivement, nulles en* $x_0$*. Alors la suite* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $F$ *sur* $[a, b]$*.*

**Preuve 1.3.2.** *En reprenant la démonstration du Théorème 2.1.9 et en remplaçant a par* $x_0$ *et b par* $x$*, on a pour tout* $x \in [a, b]$ *:*

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|b - a| = \varepsilon,$$

*et l'assertion s'ensuit.*

**Théorème 1.3.3.** *(Dérivée d'une limite uniforme)*

*Soit* $[a, b]$ *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$ *et* $f_n : [a, b] \to \mathbb{k}$ *une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur* $[a, b]$*. On suppose que*

1. *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers une fonction (continue)* $f : [a, b] \to \mathbb{k}$*.*

2. *La suite dérivée* $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément convergente vers une fonction (continue)* $g : [a,b] \to \mathbb{k}$.

*Alors* $f$ *admet une dérivée continue et*

$$f' = g.$$

## 1.4 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $D$ et à valeurs dans $\mathbb{k}$ (réelles ou complexes). On note $S_n$ la fonction définie sur $D$ par les sommes partielles :

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) \text{ pour tout } x \in D.$$

### 1.4.1 Convergence simple et absolue

**Définition 1.4.1.** *(Convergence simple pour les séries de fonctions)*

*On dit que la série de fonctions* $\sum\limits_n f_n(x)$ *de terme général* $f_n$ *converge simplement sur* $D$, *si la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* $D$.

On appelle domaine de convergence simple de la série $\sum\limits_n f_n(x)$ l'ensemble des $x \in D$ tels que la série numérique $\sum\limits_n f_n(x)$ converge.

On suppose que la série $\sum\limits_n f_n(x)$ converge simplement sur $D$. On note pour tout $x \in D$, $S(x)$ la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$ de sorte que :

$$\forall x \in D, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La fonction $S$, définie sur $D$, est appelée la somme de la série $\sum\limits_n f_n(x)$. On appelle, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, reste d'ordre $n$ la fonction $R_n : D \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in D, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n + R_n = S.$$

**Définition 1.4.2.** *(Convergence absolue pour les séries de fonctions)*

*On dit que la série de fonctions* $\sum_n f_n(x)$ *de terme général* $f_n$ *converge absolument sur* $D$ *si pour chaque* $x \in D$*, la série de terme positifs* $\sum_n |f_n(x)|$ *converge dans* $\mathbb{R}$.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ converge absolument sur $D$ si et seulement si la série de fonctions $\sum_n |f_n|$ converge simplement sur $D$.

### 1.4.2 Convergence uniforme

**Définition 1.4.3.** *On dit que la série de fonctions* $\sum_n f_n(x)$ *de terme général* $f_n$ *converge uniformément sur* $D$ *si la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $D$.

En d'autre termes, pour montrer la convergence uniforme de la série $\sum_n f_n(x)$ sur $D$, il faut d'abord vérifier la convergence simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note $S$ la somme, puis vérifier que le reste converge uniformément vers 0.

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |R_n(x)| = 0.$$

**Proposition 1.4.1.** *(Une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions)*

*Si la série de fonctions* $\sum_n f_n(x)$ *converge uniformément sur* $D$*, alors la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $0$ *sur* $D$ *(*$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x)| = 0$*).*

**Exemple 12.** *La série de terme général* $x \mapsto f_n(x) = \frac{x}{x+n^2}$ *converge simplement sur* $[0, +\infty[$ *. En effet*

*Pour chaque* $x \geq 0$*, on a*

$$\frac{x}{x+n^2} \leq \frac{x}{n^2},$$

*et la série numérique de terme général* $\frac{1}{n^2}$ *est convergente. D'autre part, on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{x}{x+n^2} = 1,$$

*car la fonction* $x \mapsto \frac{x}{x+n^2}$ *est croissante et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+n^2} = 1$*. Donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = 1 \neq 0.$$

*Ceci montre que la série ne converge pas uniformément sur* $[0, +\infty[$ *.*

**Proposition 1.4.2.** *(Critère de convergence uniforme pour les séries de fonctions alternées)*

*Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions positives, définies sur* $D$*, telle que*

1. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $0$.
2. *Pour tout* $x \in D$*, la suite numérique* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *décroit, i.e.* $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

*Alors la série de fonctions* $\sum\limits_n (-1)^n f_n$ *converge uniformément sur* $D$.

### 1.4.3 Convergence normale

On dispose, pour les séries de fonctions, d'une notion de convergence impliquant la converge uniforme et souvent facile à vérifier : la convergence normale.

**Définition 1.4.4.** *On dit qu'une série de fonctions de terme général* $f_n$ *converge normalement sur un ensemble* $D$ *s'il existe une série numérique de terme général positif* $v_n$ *qui soit convergente et telle que*

$$|f_n| \leq v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \in D.$$

**Remarque 1.4.1.** *Une série de fonctions de terme général* $f_n$ *converge normalement sur* $D$ *si et seulement si la série numérique de terme général* $\sup\limits_{x\in D} |f_n(x)|$ *est convergente.*

**Théorème 1.4.1.** *Si une série de fonctions de terme général* $f_n$ *converge normalement sur un ensemble* $D$*, alors elle converge uniformément sur* $D$.

La convergence normale implique toutes les autres convergences comme l'indique le théorème suivant :

**Théorème 1.4.2.** *(Relations entre les différentes notions de convergences)*

*On a les implications suivantes :*

$$\sum_n f_n \text{ converge normalement} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_n f_n \text{ converge absolument} \\ \sum\limits_n f_n \text{ converge uniformément} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_n f_n \text{ converge simplement.}$$

**Exemple 13.** *Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$. On a pour tout $n \geq 1$,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

*et $\sum\limits_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de terme général $f_n$ est ainsi normalement convergente et donc uniformément convergente.*

### 1.4.4 Propriétés d'une série uniformément convergente

A l'aide des propriétés de la convergence uniforme pour les suites de fonctions, on obtient des propriétés similaires pour les séries de fonctions, que nous énoncerons.

**Théorème 1.4.3.** *(Continuité d'une série uniformément convergente)*

*Soit $\sum\limits_n f_n(x)$ une série de fonctions définies sur $D$. Supposons :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $D$.*
2. *La série de fonctions $\sum\limits_n f_n(x)$ converge uniformément sur $D$.*

*Alors, en notant $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, la fonction $S$ est continue sur $D$ et on ait :*

$$\forall x_0 \in D : \lim_{x\to x_0} \sum_n f_n(x) = \sum_n \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_n f_n(x_0).$$

**Exemple 14.** *Etudier la convergence uniforme de la série $\sum\limits_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ tel que :*

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

*On a*

$$f_n(x) = x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n.$$

- *Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et donc $\sum\limits_n f_n(x)$ converge et de somme nulle.*

- *Pour $x \neq 0$, $\sum\limits_n \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ est la série géométrique convergente de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$ et de somme $\frac{x^2+1}{x}$.*

*En résumé, $\sum\limits_n f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on a*

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x^2+1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

*Comme*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ < \\ >}} S(x) = \pm\infty.$$

*$S$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Alors $\sum_n f_n(x)$ ne converge pas uniformément vers $S$ sur $\mathbb{R}$.*

**Théorème 1.4.4.** *(Intégrale d'une série uniformément convergente)*

*Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$ et $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions continues de $[a, b]$. Alors :*

*i) La somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.*

*ii) La série $\sum_n \left( \int_a^b f_n(t)\, dt \right)$ converge dans $\mathbb{k}$ et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_a^b S(t)\, dt.$$

**Théorème 1.4.5.** *(Dérivée d'une série uniformément convergente)*

*Soit $I$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to \mathbb{k}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur $I$. On suppose que*

*i) La série de terme général $f_n$ est uniformément convergente vers une fonction continue $S : I \to \mathbb{k}$.*

*ii) La série de terme général $f_n'$ est uniformément convergente vers une fonction continue $g : I \to \mathbb{k}$.*

*Alors, $S$ admet une dérivée continue et*

$$S' = \sum_n f_n' = g.$$

**Remarque 1.4.2.** *La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une somme et d'une dérivation*

$$\left( \sum_n f_n(x) \right)' = \sum_n f_n'(x).$$

## 1.5 Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

**Définition 1.5.1.** *On appelle série entière une série de fonctions* $\sum\limits_n f_n$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ *est définie comme suit :*

$$f_n(z) = a_n z^n,$$

*la variable* $z$ *peut être réelle ou complexe.*

### 1.5.1 Rayon de convergence

Le rayon de convergence d'une série entière caractérise à peu près les modes de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_n a_n z^n$ et les propriétés analytiques de la somme.

**Définition 1.5.2.** *(Rayon de convergence)*

*On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum\limits_n a_n z^n$ *l'élément*

$$\sup\left\{r \geq 0, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\} \text{ de } [0, +\infty]$$

Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n a_n z^n$, l'ensemble des $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée est $[0, R]$.

**Théorème 1.5.1.**

1. *Si* $R = +\infty$, *alors pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *la série de terme général* $a_n z^n$ *est absolument convergente.*
2. *Si* $R = 0$, *pour tout* $z \in \mathbb{C}/\{0\}$, *la suite* $(a_n z^n)_n$ *n'est pas bornée, en particulier, la série diverge.*
3. *Si* $R \neq 0$ *et* $R \neq +\infty$ :

- *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R$, *la série de terme général* $a_n z^n$ *est absolument convergente.*
- *Si* $|z| > R$, *la suite* $(a_n z^n)_n$ *n'est pas bornée, donc la série diverge grossièrement.*
- *Si* $|z| = R$, *on ne peut rien dire en général. On a ainsi une partition du plan complexe en trois parties(dans le dernier cas).*

**Exemple 15.** *La série* $\sum\limits_n z^n$ *est absolument convergente si* $|z| < 1$ *et diverge si* $|z| \geq 1$, *donc on conclut que le rayon de convergence est* $R = 1$.

### 1.5.2 Rayon de convergence d'une somme et d'un produit

**Théorème 1.5.2.** *Soit $R_a$ le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_n a_n z^n$, $R_b$ celui d'une série entière $\sum\limits_n b_n z^n$. Alors le rayon de convergence des séries somme et produit sont supperieurs à* $\min(R_a, R_b)$. *Et pour somme :*

*Si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de $\sum\limits_n (a_n + b_n) z^n$ est égal à* $\min(R_a, R_b)$.

**Définition 1.5.3.** *Si $R$ est le rayon de convergence d'une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, le disque ouvert*

$$D^{\circ}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \ tq \ |z| < R\},$$

*est appelé disque de convergence de la série entière.*

**Remarque 1.5.1.** *Si $R$ est fini, on ne sait pas à priori si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge pour $|z| = R$.*

**Théorème 1.5.3.** *Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ et $\sum\limits_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R_a$ et $R_b$ respectivement. Alors on a*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b,$$

*et plus généralement :*

$$\bullet \exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : (|a_n| \leq k |b_n| \alpha^n) \Rightarrow (R_a \geq R_b),$$

$$\bullet \exists \alpha \in \mathbb{R}, \left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n n^{\alpha}\right) \Rightarrow (R_a = R_b),$$

*en particulier :*

$$\bullet \left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n\right) \Rightarrow (R_a = R_b).$$

### 1.5.3 Méthodes de calcul du rayon de convergence

**Théorème 1.5.4.** *(Règle de d'Alembert)*

*Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes telle que :*

1. *Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.*
2. *La suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $l \in [0, +\infty]$.*

*Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l} \in [0, +\infty]$.*

**Exemple 16.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n} z^n$, *rayon de convergence ? On a*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}}\right| = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \frac{1}{n+2} \underset{+\infty}{\to} \frac{1}{e} \times 0 = 0.$$

*Donc le rayon de convergence* $R = +\infty$, *donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n} z^n$ *converge dans* $\mathbb{C}$.

### 1.5.4 Propriétés fonctionnelles d'une série entière

**Théorème 1.5.5.** *(Continuité de la somme d'une série entière de variable réelle)*

*Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de variable réelle, de rayon de convergence* $R$ *et de somme* $S$. *La fonction* $S$ *est continue sur l'intervalle ouvert de convergence* $]-R, R[$.

**Théorème 1.5.6.** *(Primitives de la somme d'une série entière de variable réelle)*

*Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de variable réelle, de rayon de convergence* $R$ *et de somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

*On peut intégrer* $S$ *terme à terme sur tout segment inclus dans* $]-R, R[$. *En particulier,* $S$ *admet sur* $]-R, R[$ *des primitives qui valent :*

$$c + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ où } c \in \mathbb{C}.$$

*Ces primitives ont même rayon de convergence* $R$ *que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

**Théorème 1.5.7.** *(Dérivabilité et caractère* $C^\infty$ *de la somme d'une série entière)*

*Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de variable réelle, de rayon de convergence* $R$ *et de somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

*Sur* $]-R, R[$, *la fonction* $S$ *est de classe* $C^\infty$, *et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme de la fonction* $S$.

*Toutes les séries entières dérivées de* $S$ *ont même rayon de convergence* $R$ *que*

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *De plus*

- $\forall x \in \left]-R, R\right[, S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$
- $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \left]-R, R\right[, S^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$

*Les coefficients de la série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *vérifie alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Exemple 17.** ***1. La fonction exponentielle :*** $f(x) = e^x$

*Cette fonction est indéfiniment dérivable dans* $\mathbb{R}$*, et on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = e^x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

***2. Les fonctions hyperboliques :***

*Les fonctions cosinushyperbolique et sinushyperbolique ont même rayon de convergence de la fonction exponentielle, c'est-à-dire,* $R = +\infty$.

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

***3. Les fonctions circulaires :***

***a. La foction sinus :*** $f(x) = \sin x$. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *et on a :*

$$f(x) = \sin x, \ f'(x) = \cos x, \ f''(x) = -\sin x, \ f'''(x) = -\cos x,$$

*ce qui permet d'en déduire que pour tout* $p \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} f^{(4p)}(x) &= \sin x \Rightarrow f^{(4p)}(0) = 0, \\ f^{(4p+1)}(x) &= \cos x \Rightarrow f^{(4p+1)}(0) = 1, \\ f^{(4p+2)}(x) &= -\sin x \Rightarrow f^{(4p+2)}(0) = 0, \\ f^{(4p+3)}(x) &= -\cos x \Rightarrow f^{(4p+3)}(0) = -1. \end{aligned}$$

*Les dérivées d'ordre quelconque sont majorées par* 1, *et ceci quelque soit* $x$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a alors*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } R = +\infty.$$

***b. La foction cosinus :*** $f(x) = \cos x$

$$f(x) = \cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ et } R = +\infty.$$

*4.* ***La série binôme :(Famille du binôme)***

*Considérons la fonction*

$$x \mapsto f(x) = y = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$

*Son domaine de définition est* $]-1, +\infty[$. *et*

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0.$$

*Soit la série* $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0 x^n$, *le rayon de convergence* $R$ *est donné par la relation*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = 1,$$

*donc*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, R = 1.$$

*Cette série est connu sous le nom de série du binôme. Par exemple*

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \cdots
\end{aligned}$$

***5) La fonction*** $x \mapsto \frac{1}{1-x}$

*On remarque d'une part que pour tout* $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |x|^n = 0$ *et d'autre part*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \text{ pour tout } |x| < 1.$$

*d'où*

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}x^n \text{ avec } R=1 \text{ et } \frac{1}{1+x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, R=1.$$

***6) La fonction*** $x\mapsto \ln(1+x)$

*Certains développements en série entière s'obtiennent au moyen des théorèmes sur l'intégration et la dérivation des séries entières, donc du développement en série de la fonction* $\frac{1}{1+x}$ *on déduit par intégration que*

$$\ln(1+x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, R=1.$$

*De même on a*

$$\ln(1-x)=-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^{n+1}, R=1.$$

*Donc*

$$\forall x\in[-1,1[:\ln(1-x)=-\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n},$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1.3...(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots$$

*Sachant que* $\arcsin 0=0$, *on obtient*

$$\arcsin x=x+\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4...2n.(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots$$

*Par la même démarche on développe les fonctions* $x\mapsto \arccos x$, $x\mapsto \arg\sinh x$, $x\mapsto \arctan x$, $x\mapsto \arg\tanh x$.

**Exercise** :

Déterminer les développements en série entière autour de 0 des fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{e^x}{1-x},\ g(x)=\frac{5}{x^4-13x^2+36}.$$

a) On a $f(x)=f_1(x)\times f_2(x)$ avec $f_1:x\mapsto e^x$, $f_2:x\mapsto\frac{1}{1-x}$.

La fonction $f_1$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $f_2$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. On en déduit

$$\forall x\in]-1,1[:f(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \text{ avec } a_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!},$$

d'où

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ &= 1 + 2x + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \cdots + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} x^n + \cdots \end{aligned}$$

b) On a $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$.

La fonction $g$ n'est pas donc définie aux points $-3, -2, 3, 2$.

Il en résulte que le plus grand intervalle de centre 0 sur lequel $g$ peut être développable en série entière est l'intervalle $]-2, 2[$.

Soit $x$ un point de cet intervalle. On a

$$\frac{5}{(x^2 - 9)(x^2 - 4)} = \frac{1}{(x^2 - 9)} - \frac{1}{(x^2 - 4)} = -\frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{9}} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Pour tout $y$ tel que $|y| < 1$, on a $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} y^n$.

On a $\left|\frac{x^2}{9}\right| < 1$ et $\left|\frac{x^2}{4}\right| < 1$. Il en résulte

$$\forall x \in \,]-2, 2[\,, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x \left({}^{2n} \frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{9^{n+1}}\right).$$

CHAPITRE 2

# INTÉGRALES MULTIPLES

## 2.1 Intégrales doubles en coordonnées rectangulaires :

### 2.1.1 Calcul direct des intégrales doubles

L'intégrale double d'une fonction $f(x,y)$ étendue à un domaine fermé borné $D$ est par définition, la limite des sommes intégrales doubles correspondantes :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{\max\triangle x_i \to 0 \\ \max\triangle y_j \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\triangle x_i \triangle y_j \tag{2.1}$$

où

$$\triangle x_i = x_{i+1} - x_i, \triangle y_j = y_{j+1} - y_j$$

et la somme étant étendue aux valeurs de $i$ et de $j$ telles que les points $(x_i, y_j)$ appartiennent au domaine $D$.

Pour calculer les limites d'intégration dans une intégrale double on distingue trois types fondamentaux de domaines d'intégration.

**Théorème 2.1.1.** *1. Soit $P = [a,b]\times[c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction intégrable sur P. Alors*

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$$

2. *Le domaine d'intégration $D$ est limité à gauche et à droite par les droites $x = a$ et $x = b(b > a)$, en bas et en haut par les courbes continues $y = \varphi_1(x)$ et $y = \varphi_2(x)\,(\varphi_2(x) > \varphi_1(x))$. Dans le domaine $D$ la variable $x$ varie de $a$ à $b$ et la variable $y$ pour $x$ constant de $y_1 = \varphi_1(x)$ à $y_2 = \varphi_2(x)$.*

   *Le calcul de l'intégrale $(2,1)$ peut se ramener à l'intégration d'une intégrale simple d'après la formule*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

   *où quand on calcule $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$, la grandeur $x$ et supposé constante.*

3. *Le domaine d'intégration $D$ est limité inférieurement et supérieurement par les droites $y = c$ et $y = d(d > c)$, à gauche et à droite par les courbes continues $x = \psi_1(y)$ et $x = \psi_2(y)\,(\psi_2(y) > \psi_1(y))$. De même que précédament, on a*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

   *en outre dans l'intégrale $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$, $y$ est supposée constante.*

**Exemple 18.** 1. *Calculer l'intégrale $I = \int_0^1\int_x^1 (x+y)\,dydx$.*

$$\int_0^1\int_x^1 (x+y)\,dydx = \int_0^1 \left( \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_x^1 \right) dx = \int_0^1 \left( \left[ x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right]_x^1 \right) dx = \frac{1}{2}.$$

2. *Déterminer les limites d'intégration pour l'intégrale $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ où le domaine d'intégration est limité par l'hyperbole d'équation $y^2 - x^2 = 1$ et les droites $x = 2, x = -2$.*

$$y^2 - x^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{1+x^2}.$$

   *Donc*

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{2} \left( \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

3. *Calculer l'intégrale $I = \int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx$.*

$$I = \int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx = \int_{-3}^{3} dy \left[ \frac{1}{2}x^2 + 2xy \right]_{y^2-4}^{5} = \int_{-3}^{3} \left( \frac{1}{2} \left( 25 - \left(y^2-4\right)^2 \right) + 2\left(5 - \left(y^2 - \right.\right.\right.$$

**Remarque 2.1.1.** *En particulier si $D$ est un pavé de $[a,b] \times [c,d]$, alors*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

*De plus si $f(x,y) = h(x)\,g(y)$ on alors*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \left( \int_a^b h(x)\,dx \right) \times \left( \int_c^d g(y)\,dy \right).$$

## 2.1.2 Propriétés des intégrales doubles

1. L'ensemble des fonctions intégrables sur une partie mésurable $D$ de $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel et

$$\iint\limits_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

2. Soit $f \geq 0$ et intégrable sur $D$, alors

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq 0.$$

3. Si $f$ est intégrable sur $D$, alors $|f|$ est intégrable sur $D$ et

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

4. Soit $A, B$ deux parties mésurables de $\mathbb{R}^2$ telles que $mes(A \cap B) = 0$ et $f$ est intégrable sur $A$ et $B$, alors $f$ est intégrable sur $A \cup B$ et

$$\iint\limits_{A\cup B} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_B f(x,y)\,dxdy.$$

## 2.1.3 Interpretation géométrique d'une intégrale double

Soit

$$\sum = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in D \text{ une partie mésurable de } \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x,y) \right\}.$$

$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ s'interprete comme le volume $V$ du corps délimité par $D$, la surface $\sum$ et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe $oz$ et s'appient sur la frontière de $D$.

## 2.2 Changement de variables dans une intégrale double

**Théorème 2.2.1.** *Soient $D$ et $S$ deux parties mésurables de $\mathbb{R}^2$ et $g$ une application bijective de $D$ dans $S$ définie par*

$$g(u,v) = (x(u,v), y(u,v)).$$

*Supposons que $g$ possède les deux propriétés suivantes :*

1. *$g$ est de classe $C^1$ sur $D$ i.e que les fonctions $x(u,v)$ et $y(u,v)$ ont des dérivées partielles continues dans $D$.*
2. *Le Jacobien de $g$*

$$|J_g(u,v)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v) \in D.$$

*Alors on a la formule de changement de variables*

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \iint_{D=g^{-1}(S)} f[g(u,v)]\,|J_g(u,v)|\,dudv.$$

### 2.2.1 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires définissent une application de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.$\varphi : (r,\theta) \mapsto \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ dont le jacobien est

$$|J_\varphi(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

mais cette application n'est pas bijective sur $\mathbb{R}^2$. Si l'on restreint $g$ à une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $g_{|D}$ soit bijective, alors la formule de changement de variables précédentes nous donne dans ce cas

$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \iint_{D=g^{-1}(S)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

**Remarque 2.2.1.** *Dans le cas où le domaine $S$ est délimité par deux courbes dont les équations en coordonnées polaires sont connues*

$$\widehat{ABC} : \varphi = \varphi_2(\theta), \widehat{AEC} : \varphi = \varphi_1(\theta).$$

*Alors*

$$\int\int_S f(x,y)\,dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\varphi(\theta_1)}^{\varphi(\theta_2)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

**Exemple 19.** *1. Calculer l'intégrale* $\int\int_S \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, *où le domaine* $S$ *est le cercle de rayon* $R=1$ *et de centre à l'origine des coordonnées.*

*Solution :*

*En posant*

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \Rightarrow \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-r^2}.$$

*Puisque dans le domaine* $D$, *la coordonnée* $r$ *pour* $\theta$ *arbitraire varie de* $0$ *à* $1$ *et* $\theta$ *varie de* $0$ *à* $2\pi$ *, on a*

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$
$$\int\int_S \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}rdrd\theta = \tfrac{2}{3}\pi.$$

*2. Calculer l'intégrale* $\int\int_S xydxdy$ *telle que*

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < R^2, x > 0, y > 0\right\}.$$

*En utilisant les coordonnées polaires*

$$x^2+y^2 < R^2 \Leftrightarrow 0 < r < R,$$
$$x > 0, y > 0 \Leftrightarrow r\cos\theta > 0, y = r\sin\theta > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

*D'où*

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/0 < r < R, 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}\right\},$$
$$\int\int_S xydxdy = \int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 r\cos\theta\sin\theta drd\theta = \int_0^R r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta = \tfrac{R^4}{8}.$$

## 2.3 Intégrales triples

### 2.3.1 Intégrales triples en coordonnées rectangulaires :

**Introduction :**

Soit $f$ une fonction réelle de trois variables réelles définies sur une partie mésurable $V$ de $\mathbb{R}^3$.

$$f : \underset{(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)}{V \subset} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

L'intégrale triple de la fonction $f$ étendue au domaine est par définition, la limite des sommes intégrales triples correspendantes :

$$\int\int_V\int f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\substack{\max \triangle x_i \to 0 \\ \max \triangle y_j \to 0 \\ \max \triangle z_k \to 0}} \sum_i\sum_j\sum_k f(x_i,y_j,z_k)\,\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k. \tag{2.2}$$

Le calcul de l'intégrale triple se ramène au calcul succissif de trois intégrales simples ou au d'une intégrale double et d'une intégrale simple.

**Remarque 2.3.1.** *En particulier si* $f(x,y,z) = 1$ *sur* $V$ *où*

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\right\}.$$

*Alors* $\int\int_V\int f(x,y,z)\,dxdydz$ *représente le volume de* $S$.

**Exemple 20.** *Calculer l'intégrale* $I = \int\int_V\int x^3y^2z\,dxdydz$ *où le domaine* $V$ *est définie par les inégalités* $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^x x^3y^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{xy} dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x x^5y^4\,dy\right)dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^1\int_0^x x^{10}\,dx = \frac{1}{110}. \end{aligned}$$

**Théorème 2.3.1.** *(Changement de variables dans une intégrale triple)*

*Soient* $D$ *et* $D'$ *deux parties mésurables de* $\mathbb{R}^3$ *et* $g$ *une application bijective de* $D$ *dans* $D'$ *définie par*

$$g(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)).$$

*$g$ est de classe $C^1$ sur $D$ et telle que le Jacobien de $g$*

$$|J_g(u,v,w)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u,v,w) \in D.$$

*Alors on a la formule de changement de variables*

$$\int\int_{D'}\int f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int_{D=g^{-1}(D')}\int f[g(u,v,w)]\,|J_g(u,v,w)|\,dudvdw.$$

### 2.3.2 Application du théorème précédente au changement de variables en coordonnées cylindriques

En posant

$$\varphi(r,\theta,z)=\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

$\varphi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et $J_\varphi(r,\theta,z)=r$.

En considérant un domaine mésurable $D$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi:\varphi^{-1}\left(D'\right)\to D$ soit bijective et $f$ une fonction intégrable sur $D$, alors on a

$$\int\int_D\int f(x,y,z)\,dxdydz=\int\int_{\varphi^{-1}(D)}\int f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,rdrd\theta dz.$$

**Exemple 21.** *Calculer l'intégrale* $I=\int\int_D\int z^{x^2+y^2}dxdydz$ *où*

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,x^2+y^2\leq a^2,a>0,0\leq z\leq 1.\right\}$$

*On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques*

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta,z) &= \begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z\in\mathbb{R}. \end{cases} \\ x^2+y^2 &\leq a^2\Leftrightarrow r^2\leq a^2\Leftrightarrow r\leq a.\end{aligned}$$

*Donc*

$$D'=\varphi^{-1}(D)=\left\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3,0<r\leq a,0\leq z\leq 1,\theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

*et*

$$\begin{aligned}\int\int_D\int z^{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^a\int_0^1\int_0^{2\pi} z^{r^2}rdrd\theta dz=2\pi\int_0^a r\left(\int_0^1 z^{r^2}dz\right)dr \\ &= 2\pi\int_0^a r\left[\frac{1}{r^2+1}z^{r^2+1}\right]_0^1 dr=\pi\ln\left(a^2+1\right).\end{aligned}$$

### 2.3.3 Application du théorème précédente au changement de variables en coordonnées sphériques

En posant

$$\psi(r,\theta,z)=\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, 0\leq\theta\leq\pi \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$$

On a $\psi\in C^1(\mathbb{R}^3)$ et

$$|J_\psi(r,\theta,\varphi)|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\theta\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\theta.$$

En considérant un domaine mésurable $D$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\psi:\psi^{-1}(D)\to D$ soit bijective et $|J_\psi(r,\theta,\varphi)|, \forall(r,\theta,\varphi)\in\psi^{-1}(D)$, alors on a

$$\int\int_D\int f(x,y,z)\,dxdydz=\int\int_{\psi^{-1}(D)}\int f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta drd\theta d\varphi,$$

pour une fonction intégrable sur $D$.

**Exemple 22.** *1. Calculer l'intégrale* $I=\int\int_D\int\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ *où*

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3_+, x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}.$$

*On utilise les coordonnées sphériques*

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\sin\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\theta, \\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\Leftrightarrow r^2\leq R^2\Leftrightarrow 0<r\leq R, \\ \begin{cases} x\geq 0\Leftrightarrow r\cos\varphi\sin\theta\geq 0 \\ y\geq 0\Leftrightarrow r\sin\varphi\sin\theta\geq 0 \end{cases}\Rightarrow(\theta,\varphi)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2, \\ z\geq 0\Leftrightarrow r\cos\theta\geq 0\Rightarrow\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

*d'où*

$$\int\int_D\int\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}rr^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{R^4}{8}.$$

2. *Calcul de volume d'une sphère de rayon R i.e* $I = \int\int_D \int dxdydz$ *où*

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}.$$

*Par l'utilisationdes coordonnées sphériques on obtient*

$$D^{'} = \psi^{-1}(D) = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3, 0 < r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\right\}.$$

*et*

$$\int\int_D \int dxdydz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi R^3}{3}.$$