Université Mohammed Seddik Benyahia de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département d'informatique
Année universitaire : 2025-2026

Module : Analyse 1
Licence 1, informatique

Série de TD n^o 5 : Fonctions dérivables

Exercice 1 : En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x}.$$

Exercice 2 : Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

$$f(x) = \max\{x^2-1, x+1\}, \quad g(x) = |x|\sin(x).$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & \text{pour } x \neq 1 \\ 1 & \text{pour } x = 1 \end{cases}$$

(les fonctions h et k sont laissées aux étudiants).

Exercice 3 : Calculer, lorsqu'elles existent les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right), \quad f_2(x) = \sin\left((e^x)^2\right), \quad f_3(x) = x^{\sin(x)}.$$

(la fonction f_2 est laissée aux étudiants).

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}.$$

Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$.

Exercice 5 : Soit P la fonction polynomiale réelle définie par $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. On suppose que les coefficients de P satisfont la relation

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

En considérant une primitive de P, montrer que P admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 6 :

1. Dans l'application du théorème des accroissements finis (TAF) à la fonction $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) sur l'intervalle $[a, b]$, préciser le nombre c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   Donner une interprétation géométrique.

2. Soient x et y des réels avec $0 < x < y$.

   Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

Exercice 7 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, on suppose que f est dérivable sur $]a, b[$, et que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$. En utilisant le TAF, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Exercice 8 : Calculer les limites suivantes en utilisant la règle de l'Hôpital :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ (laissée aux étudiants)
4. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\pi - 2x}$

Exercice 9 : Soit x un réel strictement positif. Démontrer que :
$$\left| \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 10 : Calculer les limites suivantes en utilisant la formule de Mac Laurin-Young à un ordre convenable :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2 + x}$ (laissée aux étudiants)
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x \cdot \sin x - x(1+x)}{x^3}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^4}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x) + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.