Corrigé Travaux dirigés N°8

Exercice 01

1. L'équation de propagation de l'onde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

2. La célérité **c** des oscillations :

$$c=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

3. Les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables :

$$y(x,t)=A(x)B(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}B(t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}A(x)$$

$$\Rightarrow\frac{\ddot{A}(x)}{A(x)}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{B}(t)}{B(t)}\quad\Rightarrow\begin{cases}A(x)=A_1\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)+A_2\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)\\ B(t)=B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)\end{cases}$$

$$y(x,t)=\left[A_1\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)+A_2\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right][B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)]$$

4. Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance **a**, lâchée sans vitesse initiale. Les conditions aux limites et les conditions initiales sont :

$$\begin{cases}y(x=0,t)=y(x=a,t)=0\\ \dot{y}(x,t=0)=0\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}A_1=0\quad\frac{\omega}{c}a=n\pi\\ B_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A(x)=A_2\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\\ B(t)=B_1\cos\left(\frac{n\pi c}{a}t\right)\end{cases}\qquad y(x,t)=\sum_n C\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{a}t\right)$$

Les fréquences propres : $\omega_n=\frac{nc\pi}{a}\quad\Rightarrow f_n=\frac{nc}{2a}=n\left(\frac{c}{2a}\right)$

$$\Rightarrow f_1=\left(\frac{c}{2a}\right)=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T=4a^2\mu f_1^2=4a^2\rho S f_1^2=4\ .\ (0,63\ )^2.1200\ .\ 0,42\ .10^{-6}.(147)^2=17,3\ N$$

Exercice 02

I.

1. La valeur de la tension **:**

$\mathbf{T_0 = \mu\, c^2} \qquad \mathbf{T_0 = 2.10^{-2}\,(500)^2 = 5000N}$

2. L´equation d´onde d´Alembert : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$ $\qquad (*)$

II. On considère l´onde stationnaire :

$$s_1(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_1 t)$$

1.

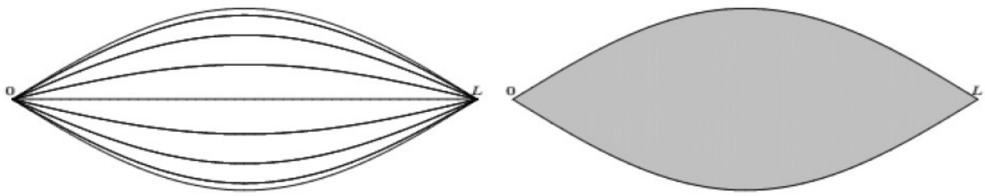
$$\frac{\partial^2 s_1(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_1^2 A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_1 t) = -\omega_1^2\, s_1(x,t)$$
$$\frac{\partial^2 s_1(x,t)}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 A\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_1 t) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 s_1(x,t)$$

En remplaçant dans l´equation d´Alembert $(*)$, on obtient :

$$-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 s_1(x,t) + \frac{1}{c^2}\omega_1^2\, s_1(x,t) = 0 \qquad \frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi c}{L} = 2493,3\ rad/s$$

2. $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{2493,3}{2\pi} = 396,8\ Hz \qquad T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{396,8} = 2,52\,.10^{-3} = 2,52\ ms$

3. L´aspect de la corde vibrante :



La période $\mathbf{T_1}$ est très petite donc les yeux vont voir la deuxième figure.

III. On considère l´onde stationnaire :

$$s_2(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin(\omega_2 t)$$

1. De la même manière que les questions précédentes :

$$\omega_2 = \frac{2\pi c}{L} = 2\omega_1 \qquad \omega_2 = \frac{2\pi 500}{0,63} = 4986,6\ rad/s$$

2. $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{4986,6}{2\pi} = 793,6\ Hz \qquad T_2 = \frac{1}{f_2} = 1,26\ ms$

IV. On considère l´onde : $s(x,t) = A\left[\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos(\omega_1 t) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin(\omega_2 t)\right]$

$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t)$$

$s(x,t)$ est la somme de deux solutions de l´equation d´onde.

L´equation d´onde étant lineaire, $s(x,t)$ est aussi solution de l´équation d´onde de la question **I.2.** L´onde $s(x,t)$ est périodique mais n´est pas stationnaire.