

Chapitre 2 : Signaux aléatoires et processus stochastiques

1. Rappel sur les processus aléatoires

1.1. Définition

Variable aléatoire

Une variable aléatoire (v.a) X est une fonction (règle) qui assigne à chaque résultat ω d'une expérience aléatoire une valeur $X(\omega)$. On écrit la variable aléatoire X au lieu de $X(\omega)$.

Notation $X=x$.

Processus stochastique

Un processus stochastique (P.S) est une règle qui assigne à chaque résultat ω (un élément de l'ensemble des épreuves) une fonction $X(t, \omega)$. Donc, c'est une famille de fonctions du temps dépendant du paramètre ω .

Le domaine de ω est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire et le domaine de t est l'ensemble des réels.

Chaque fonction du temps est une réalisation du P.S.

Notation : En général, on note processus stochastique $X(t)$ en omettant le paramètre ω .

Exemple :

Considérons l'expérience de lancer d'une pièce de monnaie. On définit le P.S $X(t)$ comme suit :

Si pile $X(t)=\cos(2\pi t)$

Si face $X(t)=t^2$

$X(t)$ possède les interprétations suivantes :

- Une famille de fonctions si t et ω sont variables
- Une v.a si t est fixe et ω variable
- Une fonction si t est variable et ω fixe
- Un nombre si t et ω sont fixes

1.2. Statistiques des P.S

Un P.S correspond à une infinité de v.a, une v.a pour chaque t . Si on fixe t , $X(t)$ est une v.a de fonction de répartition $F(x, t)$.

Statistiques d'ordre 1

Pour une valeur donnée de t , $X(t)$ est une v.a ayant pour fonction de répartition $F(x;t) = P(X(t) \leq x)$.

La fonction de répartition dépend de t , elle est égale à la probabilité de l'évènement $\{X(t) \leq x\}$ consistant en tous les évènements ω_i tel que à t donné, $X(t, \omega_i)$ ne dépasse pas x .

La fonction $F(x ; t)$ est appelée la distribution du premier ordre et sa dérivée $f(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x}$

est la fonction densité de probabilité du premier ordre de $X(t)$.

Statistiques du second ordre

On effectue deux observations dans le temps (t_1, t_2) auxquelles correspond deux v.a $X(t_1)$ et $X(t_2)$ qu'on peut définir leurs statistiques conjointes.

Fonction de répartition conjointe

$F(x_1, x_2; t_1, t_2)$: fonction de répartition conjointe ou distribution du second ordre de $X(t_1)$ et $X(t_2)$

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\})$$

$F(x_1, x_2; t_1, t_2)$ dépend de t_1 et t_2 .

La densité de probabilité conjointe est :

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Notons que $F(x_1; t_1) = F(x_1, +\infty; t_1, t_2)$

$$f(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2$$

Propriétés du second ordre

Espérance mathématique ou moyenne statistique

La moyenne statistique de $X(t)$ est l'espérance mathématique de la v.a $X(t)$:

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x; t) dx$$

Elle représente la réalisation qui correspond à la moyenne des réalisations.

Autocorrélation

L'autocorrélation de $X(t)$ notée $R(t_1, t_2)$ est l'espérance du produit $X(t_1)X(t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

L'autocorrélation est une fonction non aléatoire qui représente l'interdépendance entre $X(t_1)$ et $X(t_2)$.

La fonction d'autocorrélation caractérise le degré de dépendance entre les v.a d'un P.S $X(t)$ pour différentes valeurs de t . La valeur de $R(t_1, t_2)$ en $t_1=t_2=t$ est la puissance moyenne de $X(t)$.

Autocovariance

L'autocovariance de $X(t)$ notée $C(t_1, t_2)$ est la covariance des v.a $X(t_1)$ et $X(t_2)$:

$$C(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))] = E[X(t_1)X(t_2)] - \mu(t_1)\mu(t_2) = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2)$$

La valeur de l'autocovariance en $t_1=t_2=t$ est égale à la variance de $X(t)$:

$$C(t, t) = R(t, t) - \mu^2(t) = E[X^2(t)] - \mu^2(t) = \sigma^2(t)$$

La variance caractérise la dispersion des réalisations du P.S par rapport à la moyenne.

Formules générales

Pour tout processus complexe $X(t)$, on définit :

- Moyenne

$$\mu(t) = E[X(t)]$$

- Autocorrélation

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)]$$

- Autocovariance

$$C(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))^*] = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\mu^*(t_2)$$

Exemple

Soit le processus $X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$

a et b sont deux v.a indépendantes de moyennes nulles.

Calculons $E[X(t)]$ et $R(t_1, t_2)$

$$E[X(t)] = E[a \cos \omega t + b \sin \omega t] = E[a \cos \omega t] + E[b \sin \omega t] = E[a] \cos \omega t + E[b] \sin \omega t$$

Or $E[a]=E[b]=0$, soit donc

$$E[X(t)]=0$$

$$R(t_1, t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[(a\cos\omega t_1+b\sin\omega t_1)(a\cos\omega t_2+b\sin\omega t_2)]$$

$$=E[a^2]\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + E[ab]\cos\omega t_1 \sin\omega t_2 + E[ab]\sin\omega t_1 \cos\omega t_2 + E[b^2]\sin\omega t_1 \sin\omega t_2$$

Puisque a et b sont indépendantes et de moyennes nulles, il en résulte que:

$$E[ab]=E[a]E[b]=0$$

$$\sigma_a^2 = E[a^2] - E^2[a] = E[a^2]$$

$$\sigma_b^2 = E[b^2] - E^2[b] = E[b^2]$$

Soit donc :

$$R(t_1, t_2) = E[a^2]\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + E[b^2]\sin\omega t_1 \sin\omega t_2 = \sigma_a^2 \cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + \sigma_b^2 \sin\omega t_1 \sin\omega t_2$$

Si en plus $\sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \sigma^2$, il vient :

$$R(t_1, t_2) = \sigma^2(\cos\omega t_1 \cos\omega t_2 + \sin\omega t_1 \sin\omega t_2) = \sigma^2 \cos\omega(t_1 - t_2)$$

1.3. Exemples de processus stochastiques

Points de Poisson

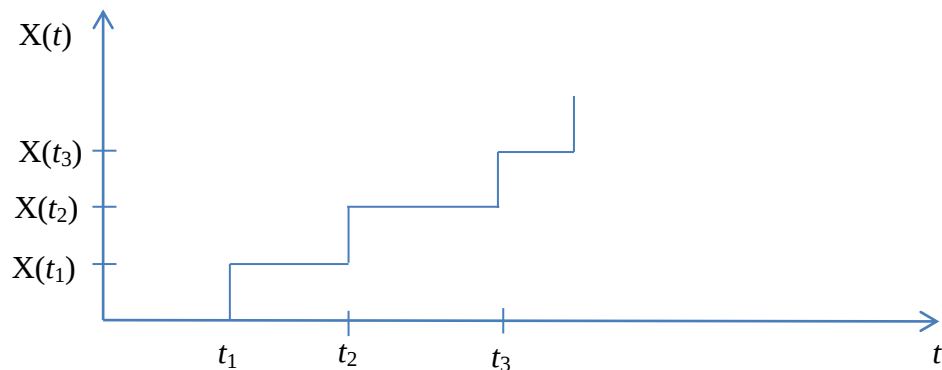
Les points de Poisson sont spécifiés par les propriétés suivantes :

1. Le nombre de points $n(t_1, t_2)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$ de longueur $t=t_2-t_1$ est une variable aléatoire ayant une distribution de Poisson de paramètre λt

$$P(n(t_1, t_2) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} : \text{probabilité d'avoir } k \text{ points dans l'intervalle de longueur } t = t_2 - t_1$$

2. Si les intervalles $[t_1, t_2]$ et $[t_3, t_4]$ ne se chevauchent pas alors les v.a $n(t_1, t_2)$ et $n(t_3, t_4)$ sont indépendantes.

En utilisant les points de Poisson, on définit le P.S $X(t)=n(0, t)$



$X(t)$ est un P.S discret d'espérance :

$$E[X(t)] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X(t) = x_i)$$

Si X est une v.a discrète de Poisson de paramètre λ alors

$$E[X(t)] = \lambda \text{ et } \text{var}(X) = \sigma^2 = \lambda$$

$X(t)$ suit une distribution de Poisson de paramètre λt , donc

$$E[X(t)] = \lambda t \text{ et } \sigma^2(t) = \lambda t$$

Montrons que la fonction d'autocorrélation de $X(t)$ est égale à

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & t_1 \leq t_2 \end{cases} \quad (*)$$

L'égalité est vérifiée pour $t_1 = t_2 = t$ puisque

$$E[X^2(t)] = \sigma^2(t) + E^2[X(t)] = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

Puisque $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$, il suffit de prouver (*) pour $t_1 < t_2$

Les v.a $X(t_1)$ et $X(t_2) - X(t_1)$ sont indépendantes puisque les intervalles $[0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$ ne se chevauchent pas. En plus, elles ont, respectivement, des distributions de Poisson de paramètres λt_1 et $\lambda(t_2 - t_1)$. Donc,

$$E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] = E[X(t_1)]E[X(t_2) - X(t_1)] = \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1)$$

En utilisant l'égalité :

$$X(t_1)X(t_2) = X(t_1)(X(t_1) + X(t_2) - X(t_1)) = X^2(t_1) + X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))$$

On déduit de ce qui précède que

$$R(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

Processus gaussien

Les processus aléatoires gaussiens ne sont que des généralisations des vecteurs aléatoires gaussiens à un nombre arbitraire de composantes.

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit gaussien ou normal si les v.a $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement normales ou de manière équivalente si la combinaison linéaire $a_1 X(t_1) + a_2 X(t_2) + \dots + a_n X(t_n)$ est une variable aléatoire Gaussienne pour tout $t_1, t_2, \dots, t_n$ et n .

Les statistiques d'un PS Gaussien sont complètement spécifiées par sa moyenne $\mu(t) = E[X(t)]$ et par sa fonction d'autocovariance $C_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$.

Les PS stationnaires au sens large sont stationnaires au sens strict.

1.4 Propriétés des fonctions de corrélation et de covariance

L'autocorrélation d'un P.S $X(t)$ réel ou complexe est la moyenne de $X(t_1)X^*(t_2)$, elle est notée $R(t_1, t_2)$, $R_X(t_1, t_2)$ ou $R_{XX}(t_1, t_2)$:

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X^*(t_2)]$$

$$\text{On déduit que } R(t_2, t_1) = E[X(t_2)X^*(t_1)] = E\left[\left(X(t_1)X^*(t_2)\right)^*\right] = R^*(t_1, t_2)$$

$$R(t, t) = E\left[|X(t)|^2\right] \geq 0$$

La fonction d'autocorrélation est semi définie positive : $\sum_i \sum_j a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geq 0$

En effet, on a :

$$E\left[\left|\sum_i a_i X(t_i)\right|^2\right] \geq 0 \Rightarrow E\left[\left(\sum_i a_i X(t_i)\right)\left(\sum_j a_j X(t_j)\right)^*\right] \geq 0$$

$$\text{D'où } \sum_i \sum_j a_i a_j^* E[X(t_i) X^*(t_j)] \geq 0$$

$$\text{Soit donc } \sum_i \sum_j a_i a_j^* R(t_i, t_j) \geq 0$$

L'inverse est aussi vrai, étant donné une fonction $R(t_1, t_2)$ définie positive, on peut trouver un P.S $X(t)$ qui a pour fonction d'autocorrélation $R(t_1, t_2)$.

L'autocovariance d'un P.S $X(t)$ est définie par :

$$C(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))^*] = E[X(t_1) X^*(t_2)] - \mu(t_1) \mu^*(t_2) = R(t_1, t_2) - \mu(t_1) \mu^*(t_2)$$

Le rapport $r(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1)C(t_2, t_2)}}$ est le coefficient de corrélation.

1.5. Intercorrélation ou cross-corrélation

La fonction d'intercorrélation (corrélation croisée ou cross corrélation) de deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ est donnée par :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1) Y^*(t_2)]$$

$$\text{On a } R_{YX}(t_2, t_1) = E[Y(t_2) X^*(t_1)] = E[X^*(t_1) Y(t_2)] = R_{XY}^*(t_1, t_2)$$

De même, la cross covariance de $X(t)$ et $Y(t)$ est donnée par :

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu(t_1))(Y(t_2) - \mu(t_2))^*] = R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_Y^*(t_2)$$

- Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits orthogonaux si $R_{XY}(t_i, t_j) = 0 \forall t_i \neq t_j$.
- Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits non corrélés si $C_{XY}(t_i, t_j) = 0 \forall t_i \neq t_j$.

1.6. Bruit blanc

Un P.S $V(t)$ est dit bruit blanc si les v.a $V(t_i)$ et $V(t_j)$ ne sont pas corrélées pour tout $t_i \neq t_j$:

$$C_V(t_i, t_j) = 0 \text{ pour tout } t_i \neq t_j$$

L'autocorrélation d'un bruit blanc peut se mettre sous la forme :

$$R(t_i, t_j) = \sigma^2 \delta(t_i - t_j), \quad \delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

1.7. Processus indépendants

Si les P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont tels que les v.a $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$; $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_n)$ sont mutuellement indépendantes alors ils sont dits indépendants.

1.8. Processus stationnaires

Un P.S $X(t)$ est dit stationnaire au sens strict si (S.S.S) si ses propriétés statistiques ne sont pas affectées par une translation dans le temps, c.a. $X(t)$ et $X(t+t_0)$ ont les mêmes statistiques.

La densité de probabilité d'un P.S S.S.S est telle que :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1+t_0, t_2+t_0, \dots, t_n+t_0) \quad \forall t_0$$

- Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits conjointement stationnaires si les statistiques conjointes de $X(t)$ et $Y(t)$ sont les mêmes que celles de $X(t+t_0)$ et $Y(t+t_0)$ pour tout t_0 .
- Un P.S complexe $Z(t)=X(t)+jY(t)$ est stationnaire ssi $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement stationnaires.

Conséquences

- $f(x; t)=f(x; t+t_0)$ pour tout t_0
 $f(x; t)$ est indépendante de t , donc $E[X(t)]=\mu(t)=\mu=\text{constante}$
- $f(x_1, x_2; t_1, t_2)=f(x_1, x_2; t_1+t_0, t_2+t_0)$: la densité de probabilité d'ordre 2 dépend uniquement de $t=t_2-t_1$
 $f(x_1, x_2; t_1, t_2)=f(x_1, x_2; \tau), \quad \tau=t_2-t_1$

Stationnarité au sens large

Un P.S $X(t)$ est stationnaire au sens large (S.S.L) si la moyenne ne dépend pas du temps $E[X(t)]=\mu=\text{constante}$ et sa fonction d'autocorrélation dépend uniquement de $\tau=t_2-t_1$.

$$R(t_1, t_2)=R(\tau)=E[X(t+\tau)X^*(t)]$$

$R(\tau)$ peut être écrite sous une forme symétrique. Si on pose $t' = t + \frac{\tau}{2}$, il vient

$$R(\tau) = E \left[X \left(t' + \frac{\tau}{2} \right) X^* \left(t' - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

$$\text{Soit donc : } R(\tau) = E \left[X \left(t + \frac{\tau}{2} \right) X^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]$$

$$\text{En particulier, on a : } R(0) = E \left[|X(t)|^2 \right]$$

La puissance d'un P.S stationnaire est indépendante de t et elle est égale à $R(0)$.

Exemple

Soit $X(t)$ un P.S stationnaire au sens large ayant pour fonction d'autocorrélation $R(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$.

Calculons le moment d'ordre 2 de la v.a $X(6)-X(4)$.

$$E[(X(6) - X(4))^2] = E^2[X(6)] + E^2[X(4)] - 2E[X(6)X(4)] = R(0) + R(0) - 2R(2)$$

$$= A + A - 2Ae^{-2\alpha} = 2A(1 - e^{-2\alpha})$$

L'autocovariance d'un P.S $X(t)$ stationnaire au sens large dépend uniquement de $\tau=t_2-t_1$.

$$C(\tau) = R(\tau) - |\mu|^2$$

Son coefficient de corrélation est donné par

$$r(\tau) = \frac{C(\tau)}{C(0)}$$

Deux P.S $X(t)$ et $Y(t)$ sont dits conjointement stationnaires au sens large si leur cross-corrélation dépend uniquement de $\tau=t_2-t_1$:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y^*(t)]$$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \mu_X \mu_Y^*$$

Si un processus est stationnaire au sens strict alors il est stationnaire au sens large, l'inverse n'est pas vrai en général.

Exemple

Soit le P.S $X(t)$ donné par $X(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, où a et b sont deux v.a.

Déterminons la condition nécessaire et suffisante de stationnarité de $X(t)$ et calculons sa fonction d'autocorrélation.

Si $X(t)$ est S.S.L alors $E[X(t)]$ ne dépend pas du temps :

$$E[X(t)] = E[a \cos \omega t + b \sin \omega t] = E[a] \cos \omega t + E[b] \sin \omega t$$

$E[X(t)]$ ne dépend pas de t si $E[a] = E[b] = 0$, donc a et b sont de moyennes nulles.

$$\text{On a } E[|X(t)|^2] = R(0)$$

En particulier, pour $t=0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$, il vient :

$$E[|X(0)|^2] = E\left[\left|X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right|^2\right]$$

Or $X(0) = a$ et $X\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = b$, ce qui donne

$$E[a^2]=E[b^2]=\sigma^2$$

$$\begin{aligned} E[X(t+\tau)X(t)] &= E\left[a^2 \cos \omega(t+\tau) \cos \omega t + ab \cos \omega(t+\tau) \sin \omega t + ab \sin \omega(t+\tau) \cos \omega t \right. \\ &\quad \left. + b^2 \sin \omega(t+\tau) \sin \omega t\right] \\ &= E[a^2] \cos \omega(t+\tau) \cos \omega t + E[b^2] \sin \omega(t+\tau) \sin \omega t + E[ab](\cos \omega(t+\tau) \sin \omega t + \sin \omega(t+\tau) \cos \omega t) \\ &= \sigma^2 \cos \omega \tau + E[ab] \sin \omega(2t+\tau) \end{aligned}$$

$E[X(t+\tau)X(t)]$ ne dépend pas de t si $E[ab]=0$, dans ce cas $R(\tau) = \sigma^2 \cos \omega \tau$

1.9. Cyclo-stationnarité

Un P.S $X(t)$ est dit cyclo-stationnaire ou périodiquement stationnaire si ses statistiques sont invariantes à une translation de l'origine temporelle pour des multiples entiers de la constante T . La fonction de répartition de $X(t)$ satisfait :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1+mT, t_2+mT, \dots, t_n+mT) \text{ pour tout entier } m$$

1.10. Ergodicité

Définition

Un P.S stationnaire $X(t)$ est ergodique si ses moyennes statistiques sont égales aux moyennes temporelles, c.a.d toutes ses statistiques peuvent être déterminées à partir d'une seule réalisation.

Ergodicité dans la moyenne

Etant donné un P.S $X(t)$ de moyenne constante $E[X(t)]=\mu$, on forme la moyenne temporelle

$$\mu_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (1)$$

Le P.S $X(t)$ est dit ergodique au sens de la moyenne si avec une probabilité égale à 1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T = \mu \quad (2)$$

μ_T est une v.a de moyenne

$$E[\mu_T] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)] dt = \mu$$

Soit σ_T^2 la variance de μ_T . On déduit que l'égalité (2) est vérifiée ssi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_T^2 = 0$$

Théorème

Un P.S $X(t)$ est ergodique au sens de la moyenne ssi son autocovariance $C(t_1, t_2)$ est telle que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

Preuve

$$\text{Ceci découle de l'égalité } \sigma_T^2 = \frac{1}{4T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

Ergodicité dans l'autocorrélation

On veut déterminer l'autocorrélation $R(\tau) = E[X(t+\tau)X(t)]$ d'un P.S $X(t)$ stationnaire à partir d'une seule réalisation.

On forme le processus $Z_\tau(t) = X(t+\tau)X(t)$

On a $E[Z_\tau(t)] = R(\tau)$, donc pour déterminer $R(\tau)$, il suffit d'appliquer les résultats précédents en substituant $Z_\tau(t)$ pour $X(t)$.

Le P.S $X(t)$ est dit ergodique au sens de l'autocorrélation si le P.S correspondant $Z_\tau(t)$ est ergodique au sens de la moyenne, c.a.d si

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t+\tau)X(t)dt = R(\tau)$$

2. Densité spectrale de puissance

2.1. Définition

La densité spectrale de puissance ou spectre de puissance (DSP) $S_{XX}(\omega)$ d'un P.S $X(t)$ stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

L'estimation spectrale est l'ensemble des méthodes d'estimation de la DSP.

La fonction d'autocorrélation est donnée par la transformée de Fourier inverse de la DSP :

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

La puissance moyenne est obtenue en posant $\tau=0$:

$$P_X = R_{XX}(0) = E[X^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) d\omega$$

La DSP montre la distribution de la puissance par unité de fréquence.

2.2. Estimation de la densité spectrale de puissance

Supposons qu'on dispose d'une réalisation $X(t)$ d'un P.S mais seulement sur l'intervalle $[-T, T]$:

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t) & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

La fonction d'autocorrélation temporelle de $X_T(t)$ peut être déterminée par :

$$\begin{aligned} R_T(\tau) &= \frac{1}{2T} X_T(\tau) * X_T(-\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) X_T(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X_T(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (3)$$

où $*$ dénote la convolution

Soit finalement :

$$\begin{aligned} R_T(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-|\tau|} X(t) X(t+|\tau|) dt & |\tau| < 2T \\ &= 0 & |\tau| > 2T \end{aligned}$$

$X_T(t)$ est une réalisation d'un P.S, donc $R_T(\tau)$ est une grandeur aléatoire dont la moyenne est :

$$\begin{aligned} E[R_T(\tau)] &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-|\tau|} E[X(t) X(t+|\tau|)] dt = \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_{XX}(\tau) & |\tau| < 2T \\ &= 0 & |\tau| > 2T \end{aligned}$$

où $R_{XX}(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du P.S $X(t)$

Si le P.S est ergodique au sens de l'autocorrélation, la variance de $R_T(\tau)$ tend vers 0 lorsque $T \rightarrow \infty$ et $R_T(\tau)$ fournit une estimation de $R_{XX}(\tau)$ pour T suffisamment grand

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_T(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Considérons la transformée de Fourier de $R_T(\tau)$:

$$S_T(\omega) = \int_{-2T}^{2T} R_T(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

En appliquant la propriété de la convolution à (3), on obtient :

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T} |\tilde{X}_T(\omega)|^2$$

où $\tilde{X}_T(\omega)$ est la transformée de Fourier de $X_T(t)$.

$$\tilde{X}_T(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T X(t) e^{-j\omega t} dt$$

La grandeur aléatoire $S_T(\omega)$ est appelée periodogramme. Sa moyenne

$$E[S_T(\omega)] = \int_{-2T}^{2T} E[R_T(\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

est égale à la densité spectrale de puissance si la durée d'enregistrement T tend vers l'infini :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[S_T(\omega)] = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}\right] = S_{XX}(\omega) \quad (4)$$

C'est le théorème de Wiener-Khinchine. De (4), on déduit que $S_{XX}(\omega)$ est une fonction non négative.

Généralement, la variance de $S_T(\omega)$ ne tend pas vers 0 et par conséquent, $S_T(\omega)$ n'est pas une estimation satisfaisante de $S_{XX}(\omega)$ même si T tend vers l'infini.

2.3. Densité spectrale de puissance mutuelle

La densité spectrale de puissance mutuelle ou cross densité spectrale de puissance de deux P.S conjointement stationnaires est la transformée de Fourier de leur fonction de cross corrélation :

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\text{où } R_{XY}(\tau) = E[X(t+\tau)Y^*(t)]$$

$$\text{On montre que } S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{\tilde{X}_T(\omega) \tilde{Y}_T^*(\omega)}{2T} \right]$$

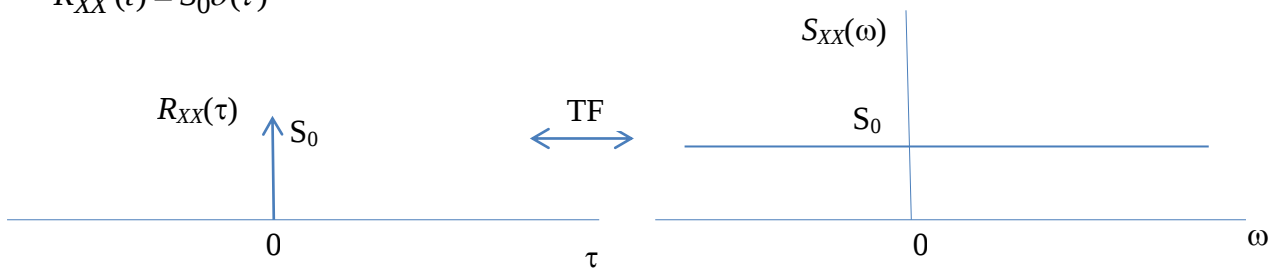
2.4. Densité spectrale de puissance du bruit blanc

Un bruit blanc est un P.S dont la densité spectrale de puissance est constante

$$S_{XX}(\omega) = S_0 \quad -\infty < \omega < \infty$$

La fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est une impulsion de Dirac :

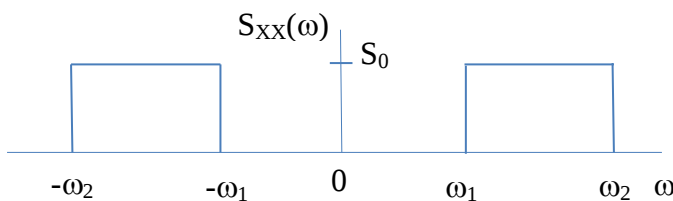
$$R_{XX}(\tau) = S_0 \delta(\tau)$$



Les v.a $X(t)$ et $X(t+\tau)$ sont non corrélées pour toute valeur non nulle de τ . Un tel processus est irréalisable parce que la puissance moyenne $E[X^2(t)] = R_{XX}(0)$ est infinie.

Un bruit blanc à bande limitée appelé bruit coloré est un processus dont la densité spectrale de puissance est constante dans une bande et nulle à l'extérieur de cette bande :

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} S_0 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



2.5. Estimation de la densité spectrale de puissance

2.5.1. Le périodogramme

C'est un estimateur de la densité spectrale de puissance qui consiste à calculer le module au carré de la T.F. de $X_T(t)$.

Cas continu :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

Cas discret :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2$$

Pour le calcul numérique sur ordinateur, ω est discrétisée : $\omega = k \frac{2\pi}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$\hat{\Phi}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \right|^2, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

2.5.2. Le périodogramme moyenné lissé

Une autre technique permettant d'améliorer les performances du périodogramme consiste à décomposer le signal observé $x(n)$, $n=0, \dots, N-1$ en L segments plus courts (M échantillons) qui peuvent se chevaucher entre-eux, calculer le periodogramme de chaque segment X_l puis calculer la moyenne des L periodogrammes :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left\{ \left| \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} X_l(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\}$$

Ceci a pour effet de diviser la variance du périodogramme par un facteur L et diminuer la résolution spectrale du même facteur. Si on augmente M , on améliore la résolution spectrale. On peut aussi combiner un moyennage des estimateurs avec un lissage des périodogrammes estimés sur chaque segment (périodogramme lissé moyenné).

2.5.3. Le corrélogramme

C'est un estimateur de la densité spectrale de puissance qui consiste à calculer la T.F. d'une estimée de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$.

Cas continu :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{xx}(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right|^2$$

Cas discret :

$$\hat{\Phi}_{xx}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\phi}_{xx}(k) e^{-j\omega n} \right|^2$$

3. Filtrage des signaux aléatoires

Les techniques de filtrage développées pour les signaux déterministes peuvent également être appliquées aux signaux aléatoires. On s'intéresse alors en particulier aux relations entre les caractéristiques statistiques des signaux en entrée et en sortie du filtre de traitement. C'est ce problème qui est abordé dans cette partie, pour les signaux aléatoires à temps continu et discret.

Notons que le filtrage est un traitement couramment appliqué aux signaux aléatoires, pour retenir les composantes fréquentielles utiles et atténuer les composantes fréquentielles indésirables (bruit, etc.).

Soit $X(t)$ un processus aléatoire stationnaire au second ordre. On applique le filtre H (supposé stable) à une réalisation de $X(t)$. La sortie du filtre est une réalisation d'un processus aléatoire $Y(t)$ stationnaire.

La valeur moyenne du signal de sortie

$$\mu_Y = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha\right] = E[X(t)] \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)d\alpha = H(0)\mu_X$$

est égale à la moyenne du signal d'entrée multipliée par le gain en continu du système.

La fonction de corrélation mutuelle entre l'entrée et la sortie est :

$$R_{YX}(\tau) = E[Y(t+\tau)X^*(t)] = E\left[X^*(t)Y(t+\tau)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[X^*(t)X(t+\tau-\alpha)]h(\alpha)d\alpha$$
$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha = R_X(\tau) * h(\tau)$$

La fonction d'autocorrélation à la sortie est :

$$R_Y(\tau) = E[Y^*(t)Y(t+\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[Y(t+\tau)X^*(t-\alpha)]h^*(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau+\alpha)h^*(\alpha)d\alpha$$
$$= R_{YX}(\tau) * h^*(-\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

En prenant la transformée de Fourier de $R_{YX}(\tau)$ et $R_Y(\tau)$, on obtient :

$$S_{YX}(f) = S_X(f)H(f)$$
$$S_Y(f) = S_X(f)H(f)H^*(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

Le spectre de puissance à la sortie est égal au spectre de puissance à l'entrée multiplié par le carré du module de la réponse en fréquence.

La puissance totale est :

$$P_Y = R_Y(0) = E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) |H(f)|^2 df$$

Excitation par un bruit blanc

Si le signal d'entrée est un bruit blanc

$$R_X(\tau) = n_0 \delta(\tau)$$

$$S_X(f) = n_0$$

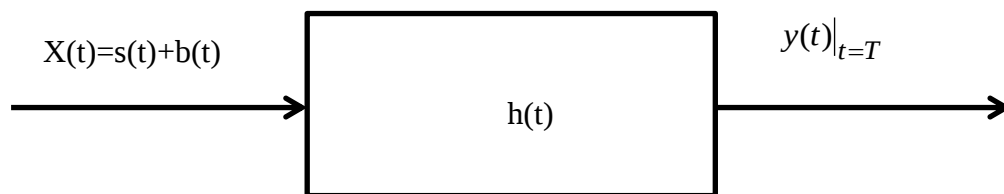
La fonction de corrélation mutuelle entre l'entrée et la sortie est proportionnelle à la réponse impulsionnelle du système :

$$R_{YX}(\tau) = n_0 h(\tau)$$

La puissance à la sortie est

$$P_Y = n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Filtre adapté



$s(t)$: signal déterministe connu, de support $[0, T]$.

$X(t)$: signal bruité

$b(t)$: bruit blanc

Principe : filtrage de $X(t)$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ qui maximise le rapport signal à bruit à l'instant T (fin du signal) :

$$y(t) = X(t) * h(t) = \underbrace{s(t) * h(t)}_{y_s(t)} + \underbrace{b(t) * h(t)}_{y_b(t)}$$

Critère :

$$\max_{\{h(t)\}} \frac{|y_s(T)|^2}{E[|y_b(t)|^2]}$$

Expression du filtre adapté : $h(t) = s(T-t)$

Sortie du filtre adapté

$$y(t) = X(t) * h(t) = X(t) * s(T-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) s(T-(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau) s((T+\tau)-t) d\tau$$

Le filtre adapté calcule l'intercorrélation entre le signal bruité $X(t)$ et le signal connu à détecter, translaté de $-T$: $s(t+T)$.

Sortie du filtre adapté : Développons l'expression de $y(t)$:

$$y(t) = X(t) * h(t) = (s(t) + b(t)) * s(T - t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) s(T - t + \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} b(\tau) s(T - t + \tau) d\tau$$

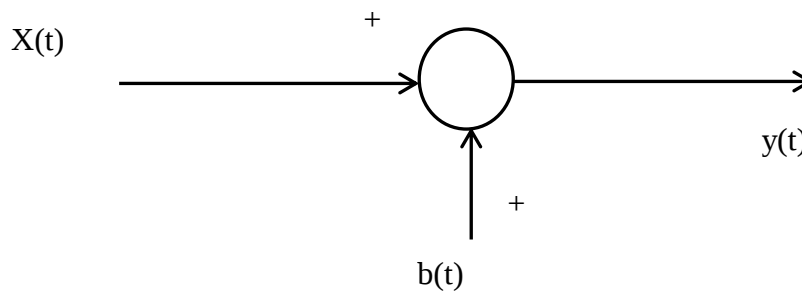
$$= R_s(t - T) + R_{bs}(t - T) \approx R_s(t - T)$$

La sortie du filtrage adapté lorsque le signal $s(t)$ est présent, est donc l'autocorrélation $R_s(t - T)$ du signal $s(t)$.

Le filtre adapté passe donc par un maximum à l'instant T lorsque le signal est présent.

Si l'instant d'arrivée du signal est $t_0 \neq 0$ inconnu, il suffit de détecter le passage par un maximum de la sortie du filtre adapté qui se produira à l'instant $t_0 + T$ (fin du signal).

Filtre de Wiener



$X(t)$: signal inconnu ou aléatoire

$b(t)$: bruit additif

$y(t)$: signal bruité

Objectif : filtrage optimal de $y(t)$ pour extraire $x(t)$ du bruit $b(t)$. Signal débruité : $\hat{x}(t)$

Hypothèses :

On ne connaît pas $x(t)$

$x(t)$ et $b(t)$ sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés

les densités spectrales de puissance (d.s.p.) $S_x(f)$ et $S_b(f)$ de $x(t)$ et $b(t)$ sont connues

Filtrage "optimal" du bruit : le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ tel que :

$$\hat{x}(t) = y(t) * h(t)$$

$$E[(\hat{x}(t) - x(t))^2] \text{ minimum}$$

Réponse en fréquence du filtre de Wiener :

$$H(f) = \frac{S_x(f)}{S_x(f) + S_b(f)} = \frac{1}{1 + \frac{S_b(f)}{S_x(f)}}$$