

Traitement avancé du signal
Série d'exercices n° 2

Exercice 1

Dans l'expérience de lancer d'une pièce de monnaie, on forme le processus $X(t)$ comme suit :

$X(t) = \sin 2\pi t$ si face

$X(t) = 2t$ si pile

a) Calculer $E[X(t)]$

b) Déterminer $F(x ; t)$ pour $t=0.25$ et $t=0.5$.

Exercice 2

a) Soit le processus stochastique défini par $X(t) = a e^{j\omega t}$, où a est une variable aléatoire. Déterminer la fonction d'autocorrélation $R(t_1, t_2)$.

b) Les variables aléatoires a_i sont non corrélées, de moyennes nulles et de variances σ_i^2 . On forme le processus

$$X(t) = \sum_i a_i e^{j\omega_i t}$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation $R(t_1, t_2)$.

Exercice 3

On donne deux processus stochastiques indépendants d'espérances nulles, avec

$$E[X(t)X(t+\tau)] = A e^{|\tau|} \quad \text{et} \quad E[Y(t)Y(t+\tau)] = B \cos(\tau) + a^2$$

où a , A et B sont des constantes.

a) Soit le processus stochastique donné par $Z(t) = X(t) + Y(t)$

i) Déterminer la fonction de d'autocorrélation de $Z(t)$ notée $R_Z(\tau)$.

ii) Calculer la variance de $Z(t)$.

b) Soit le processus stochastique donné par $P(t) = X(t) \cdot Y(t)$

i) Déterminer la fonction de d'autocorrélation de $P(t)$ notée $R_P(\tau)$.

ii) Calculer la variance de $P(t)$.

Exercice 4

Soit un processus stochastique normal ayant pour espérance et fonction d'autocorrélation $\mu_x = 0$ et $R_{xx}(\tau) = 4 \exp(-2|\tau|)$, respectivement. On forme les variables aléatoires $Z = X(t+1)$ et $W = X(t-1)$.

Trouver $E[ZW]$ et $E[(Z+W)^2]$.

Exercice 5

Un processus stationnaire $w(t)$ ayant pour autocorrélation $R_{ww}(\tau) = n_0 \delta(\tau)$ ($\delta(\tau)$ étant l'impulsion de Dirac) est appliquée à l'entrée d'un système linéaire temps invariant de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-at} u(t)$, avec $u(t)$ dénotant l'échelon unité et $a > 0$.

1. Déterminer la densité spectrale de puissance du signal de sortie $y(t)$.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation de la réponse du système en régime permanent.
3. Calculer la puissance du signal de sortie.

Exercice 6

On applique à l'entrée d'un filtre passe-bas RC un bruit blanc. Déterminer la densité spectrale de puissance du signal de sortie, sa fonction d'autocorrélation et sa puissance moyenne.

