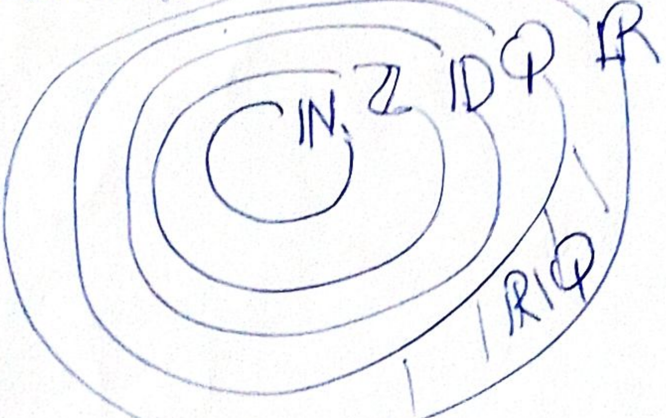
Chapitre 1

Propriétés de l'ensemble $\mathbb{R}$

Introduction:

L'ensemble des nombres réels qu'on note $\mathbb{R}$ c'est l'ensemble de tous les nombres que l'on peut écrire, en utilisant les chiffres 0, 1, ..., 9, les signes +, - et la virgule.

L'ensemble $\mathbb{R}$, contient les entiers naturels $\mathbb{N}$, les entiers relatifs $\mathbb{Z}$, les nombres décimaux $\mathbb{D}$, les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et les irrationnels.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni des quatre opérations arithmétiques satisfaisants les mêmes règles que celles sur les fractions et ces opérations sont compatibles avec la relation d'ordre. Mais il satisfait en plus la propriété de la borne supérieure qui fonde l'analyse réelle.

Intervalles de $\mathbb{R}$:

Soient a, b deux réels.
Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles suivants :

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ a < x < b\}$

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ a \leq x\}$

$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \ x \leq b\}$

$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ a < x\}$

$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \ x < b\}$

$\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$

$\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty,0]$

$\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

$\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ n'est pas un intervalle.

1.1 Partie majorée, minorée et bornée :

<u>Définition</u> : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. $(A \subset \mathbb{R})$
On dit que A est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in A$ $\quad x \leq M$.
Dans ce cas le nombre réel M est appelé un majorant de A

<u>Exemple</u> :

$A =]3,6[$.
Les majorant de A sont $[6,+\infty[$
$B = [1,+\infty[$
Les majorant de B n'existent pas

$C = \{-2,-1,0,1,4\}$
4 est un majorant de C puisque quelque soit $x \in C$ $\quad x \leq 4$

<u>Définition</u> : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ $(A \subset \mathbb{R})$
On dit que A est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in A$ $\quad x \geq m$

Dans ce cas le nombre réel m est appelé un minorant de A

Exemple.

$A =]3, 6[$

Les minorants de A sont $]-\infty, 3]$

$B = [1, +\infty[$

Les minorants de B sont $]-\infty, 1]$

$C = \{-2, -1, 0, 1, 4\}$

-2 est un minorant de C puisque quelque soit $x \in C$ $-2 \leq x$

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On dit que A est bornée s'il est à la fois majoré et minoré dans $\mathbb{R}$, c'est à dire s'ils existent deux nombres réels m et M tels que pour tout $x \in A$ $m \leq x \leq M$

1.2 Élément maximum, élément minimum :

Définition : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Le minorant de A qui appartient à A est appelé le plus petit élément ou minimum de A. On le note par $\min(A)$. C'est-à dire

$$m = \min(A) \text{ équivalent } \begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \text{et} \\ m \text{ appartient à } A \end{cases}$$

Exemple :

$A = [6, 25]$

6 est un minorant de A et 6 appartient à A

donc $\min(A) = 6$

$B =]0, 4[$

les minorants de B sont $]-\infty, 0]$ mais il n'existe pas un minorant qui appartient à B.

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Le majorant de A qui appartient à A est appelé le plus grand élément ou maximum de A

On le note par $\max(A)$. c'est-à dire

$M = \max(A)$ equivalent $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \quad \text{et} \\ M \text{ appartient à } A \end{cases}$

Exemple.

$A = [6, 25]$

25 est un majorant de A et 25 appartient à A
donc $\max(A) = 25$

$B =]0, 4[$

Les majorants de B sont $[4, +\infty[$ mais il n'existe pas un majorant qui appartient à B.

Remarque:

① Si le minimum d'une partie A de $\mathbb{R}$ existe, il est unique

② Si le maximum d'une partie A de $\mathbb{R}$ existe, il est unique

1.3 Borne supérieure, borne inférieur:

Definition: Soit A une partie ~~non~~ non vide de $\mathbb{R}$

Le plus grand minorant de A est appelé la borne inférieure de A.

On le note par $\inf(A)$. c'est-à-dire

$m = \inf(A)$ équivalent $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } A \\ \quad \text{et} \\ m \text{ est le plus grand minorant de } A \end{cases}$

Exemple.

$A = [-2, 2]$

Les minorants de A sont $]-\infty, -2]$

La borne inférieur de A est -2 $(\inf(A) = -2)$

Définition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Le plus petit majorant de A est appelé la borne supérieure de A. On le note par $\sup(A)$. c'est à dire

$$M = \sup(A) \text{ équivalent } \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \quad \text{et} \\ M \text{ est le plus petit majorant de } A \end{cases}$$

Exemple:

$A = [-2, 2]$

Les majorants de A sont $]2, +\infty[$

La borne supérieure de A est 2 ($\sup(A) = 2$)

Théorème (Théorème de la borne supérieure, inférieure)

1) Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure

2) Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure

1.4 Valeur absolue, partie entière:

1.4.1 Valeur absolue:

Définition On appelle valeur absolue d'un réel x le réel positif noté $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$|71| = 71$, $|-25| = -(-25) = 25$

Propriétés de la valeur absolue:

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ on a

1) $|x| \geq 0$

2) $|-x| = |x|$

3) $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$

4) $|x| = \max(-x, x)$

5) $|x| = 0$ équivalent $x = 0$

6) Soit $a \geq 0$ alors $|x| \leq a$ équivalent $-a \leq x \leq a$

7) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

8) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$

9) $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

10) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

1.4.2 Partie entière:

Définition: Soit x un nombre réel.

Le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la partie entière de x. On le note $E(x)$ ou $[x]$

Exemple:

$E(3,25) = 3$, $E(-5,33) = -6$, $E(-3) = -3$

propriétés

Soit $x \in \mathbb{R}$. on a

1) $E(x) \leq x < E(x)+1$

2) $x - 1 < E(x) \leq x$

3) $(E(x) = x) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{Z})$

4) $\forall n \in \mathbb{Z}$ $E(x+n) = n + E(x)$