

Université Mohammed Seddik Ben Yahia

Faculté des sciences et technologie

Module: Analyse 1

1ère année ST, 1ère année ingénieur

Série de TD 01

Exercice 01 : Déterminer(s'il existent) les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants

$$[-1, 3], \quad]0, 4[, \quad [-1, 3] \cap \mathbb{Z}, \quad]0, 1] \cap \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N}, \quad A = \{3 - \frac{1}{2n+1} / n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{\frac{1}{2x+1} / x \in [0, 1]\}, \quad C = \{\frac{1}{x^2+1} / x \in]0, 1]\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \geq 0\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 1 \leq 0\}.$$

Exercice 02 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$

1) Ecrire les expressions suivantes sans valeur absolue

$$3 + |x + 1|, \quad |x - 2| + |2x + 3|, \quad |x - y|.$$

2) Démontrer que

$$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice 03 : Trouver les nombres réels qui vérifiant

$$|x - 1| + |x + 1| < 1, \quad |x - 1| \times |x + 2| \leq 3.$$

Exercice 04 :

1) Evaluer les expressions suivantes

$$E(\frac{1}{2}), \quad E(\pi), \quad E(\frac{-3}{2}), \quad E(\frac{-19}{10}).$$

2) Résoudre les équations suivantes

a) $E(x) = 3,$

b) $E(2x - 1) + 1 = 0$

Exercice 05 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A = \{\frac{2n}{3n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\}$.

- 1) Trouver a et b tels que $\frac{2n}{3n+1} = a + \frac{b}{3n+1}$.
- 2) Montrer que A est bornée.
- 3) Montrer que $\sup(A) = \frac{2}{3}$ et $\inf(A) = 0$ et déterminer $\max(A)$, $\min(A)$ s'il existent.

Exercice 06 : Pour tout nombre réel $x \neq -\frac{1}{3}$, on pose

$$g(x) = \frac{2x+1}{3x+1}$$

- 1) Tracer le graphe de g .
- 2) On pose $g(\mathbb{N}) = \{g(0), g(1), g(2), \dots\}$. Quel est le plus petit majorant de $g(\mathbb{N})$? de l'ensemble $g(\mathbb{Z})$?
- 4) L'ensemble $g(\mathbb{Z})$ est-il borné.

Exercice 07 : Montrer que

- 1) $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 2) $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.
- 3) $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$.
- 4) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.
- 5) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \implies E(x) \leq E(y)$.
- 6) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.