Chapitre 2
Suites numériques réelles

2.1 Suites convergentes:

Définition: Soit I une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$.
On appelle suite numérique (suite réelle) toute application U de I dans l'ensemble $\mathbb{R}$. On note

$$U : I \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U_n$$

(n est appelé indice de la suite)

Notation:
La suite U est notée par $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou U_n)
U_n c'est le terme générle de la suite (U_n) et U_0 le terme initial

- Si $I = \mathbb{N}$, la suite est dite infinie dénombrable.

Exemple:

$$U_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto 3n-1$$

$$V_n : I \subset \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow 1+\frac{1}{3n}$$

(U_n) et (V_n) sont des suites réelles

2.2.1 suites bornées:

Définition: Soit (U_n) une suite réelle.

- (U_n) est une suite majorée si et seulement si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq M$$
- (U_n) est une suite minorée si et seulement si
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq U_n$$
- (U_n) est une suite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée c'est à dire
$$\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq U_n \leq M.$$

Exemple:

* $V_n : I \subset \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
  $n \longmapsto 1+\frac{1}{3n}$

(V_n) est une suite bornée c'est à dire $1 < 1+\frac{1}{3n} \leq \frac{4}{3}$

$\exists\, 1, \frac{4}{3} \in \mathbb{R},\ \forall n \in I \subset \mathbb{N}^*\ 1 < 1+\frac{1}{3n} \leq \frac{4}{3}$

* $U_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $n \longmapsto 3n-1$

(U_n) est une suite minorée c'est-à-dire $\exists\, m = -1,\ \forall n \in \mathbb{N}\ -1 \leq 3n-1$

2.2.2 suites monotones:

Définition: Soit (U_n) une suite réelle

On dit que (U_n) est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n \leq U_{n+1}$

On dit que (U_n) est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n < U_{n+1}$

On dit que (U_n) est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n \geq U_{n+1}$

On dit que (U_n) est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ U_n > U_{n+1}$

On dit que (U_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

Exemple

$U_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto 3n-1$

$V_n : I \subset \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longmapsto 1+\frac{1}{3n}$

on a $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 1 - (3n-1)$

$= 3n+3-1-3n+1$

$= 3 > 0$

donc (U_n) est strictement croissante

et on a $V_{n+1} - V_n = 1+\frac{1}{3n+3} - 1 - \frac{1}{3n} = \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n} = \frac{n-n-1}{3(n+1)n}$

$= \frac{-1}{3n(n+1)} < 0$

donc (V_n) est strictement décroissante.

2.2.3 Limite d'une suite.

Définition: Soit (U_n) une suite réelle.
On dit que la suite (U_n) converge vers l (on tend vers l) si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ où $l \in \mathbb{R}$

Si $\lim_{n \to +\infty} U_n = \pm\infty$ on dit que (U_n) est divergente.

Théorème: La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.

Exemple Soient

$$V_n = 1 + \frac{1}{3n} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$\lim_{n \to +\infty} V_n = 1$ donc (V_n) converge vers 1

$$U_n = 3n - 1$$

$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ donc (U_n) est divergente

Théorème (Propriétés des limites):
Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes: $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$, $\lim_{n \to +\infty} V_n = l'$.

Alors on a:

1) $\lim_{n \to +\infty} \lambda U_n = \lambda l$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2) $\lim_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = l + l'$
3) $\lim_{n \to +\infty} U_n V_n = l l'$
4) $\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \frac{l}{l'}$ (avec $V_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$)

2.2 Théorème de la convergence monotone:

Théorème: (Théorème de convergence monotone)

1) Toute suite réelle (U_n) croissante majorée est convergente
2) Toute suite réelle (U_n) décroissante minorée est convergente.
3) Toute suite réelle (U_n) convergente vers l ($l \in \mathbb{R}$) est bornée

La réciproque est fausse.

2.3 Théorème de comparaison :

Théorème

i) Soient (U_n), (V_n) et (W_n) trois suites réelles telle que à partir d'un certain rang $U_n \leq W_n \leq V_n$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l$

ii) Soient (U_n), (V_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $V_n \geq U_n$ à partir d'un certain rang. Alors (V_n) tend vers $+\infty$

iii) Soient (U_n), (V_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ et $V_n \leq U_n$ à partir d'un certain rang. Alors (V_n) tend vers $-\infty$

Exemple

* le calcul $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$

* $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 + (-1)^n$

on a $(-1)^n \geq -1$ donc $(-1)^n + n^2 \geq -1 + n^2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc $\lim (-1)^n + n^2 = +\infty$

2.4 Suites adjacentes :

Definition : Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles.

On dit que (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si

1) La suite (U_n) est croissante
2) La suite (V_n) est décroissante
3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

Exemple:

$U_n = -\frac{1}{n}$, $V_n = +\frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}^*$

on a $U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

donc (U_n) est croissante

on a $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

donc (V_n) est décroissante

on a $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 0$

Alors (U_n) et (V_n) sont adjacentes

Théorème:
Si les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes alors elle convergent vers la même limite.

2.5 Suites extraites

Définition: Soit (U_n) une suite réelle et (n_k) une suite strictement croissante d'entiers naturels

La suite (U_{n_k}) est dite sous-suite (ou suite extraite) de la suite (U_n).

Exemple: Soit (U_n) la suite réelle suivante:

$U_n = \frac{1}{n}$

$U_{2k} = \frac{1}{2k}$, $U_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$

Les suites (U_{2k}), (U_{2k+1}) sont deux sous suites de la suite (U_n)

Proposition: Soit (U_n) une suite réelle on a:

1) Si (U_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ donc toute sous suite converge vers la même limite l

2) Si (U_n) admet une sous suite divergente alors (U_n) est divergente

3) Si (U_n) admet deux sous suites convergentes vers des limites distincts alors (U_n) est divergente.

Théorème : (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Toute suite bornée admet une sous suite convergente

2.6 Suites particulières

2.6.1 Suites arithmétiques:

Définition : Une suite (U_n) est une suite arithmétique, s'il existe un nombre r tel que: $\forall n \in \mathbb{N}.\ U_{n+1} = U_n + r$

le nombre r est appelé raison de la suite

Exemple:

$U_n = 3n - 1$, $V_n = n^2 - 3$

on a $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 1 - (3n-1) = 3n + 2 - 3n + 1 = 3$

donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$

on a $V_{n+1} - V_n = (n+1)^2 - 3 - n + 3 = 2n + 1 \ldots = 2n + 1$

$2n+1$ n'est pas constante donc (V_n) n'est pas une suite arithmétique.

propriétés: Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_p. Pour tout $n \geq p$ on a:

$$U_n = U_p + (n-p)\, r$$

dons Si le premier terme U_0 on aura $U_n = U_0 + nr$

Si le premier terme U_1 on aura $U_n = U_1 + (n-1)\, r$

- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et U_p le premier terme donc on a :

si $r>0$ alors (U_n) est croissante

si $r<0$ alors (U_n) est décroissante

si $r=0$ alors (U_n) est constante (stationnaire)

si $r>0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_p+(n-p)r) = +\infty$ d'où

(U_n) est divergente

si $r<0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (U_p+(n-p)r) = -\infty$ d'où

(U_n) est divergente

- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r et U_1 le premier terme et $S = U_1+U_2+\dots+U_n$

on a $S = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{Premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

<u>Exemple</u>

$$1+2+\dots+54 = 54 \times \frac{1+54}{2} = \frac{54 \times 55}{2} = \frac{2970}{2} = 1485$$

2.6.2 Suites géométriques :

<u>Definition</u>: Une suite (U_n) est une suite géométique, s'il existe un nombre q tel que. $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = U_n q$

le nombre q est appelé raison de la suite (U_n)

<u>Exemple</u>

$$U_n = 2 \cdot 3^n$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} = 3$$

donc (U_n) est une suite géométique de raison $q=3$

propriété : Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et U_p le premier terme. Pour tout $n \geq p$ on a $U_n = U_p q^{n-p}$

donc si le premier terme U_0 on aura $U_n = U_0 q^n$

si le premier terme U_1 on aura $U_n = U_1 q^{n-1}$

- Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et U_0 le premier terme on a :

Pour $\underline{U_0 > 0}$ si $q > 1$ alors (U_n) est croissante

si $0 < q < 1$ alors (U_n) est décroissante

pour $U_0 < 0$ si $q > 1$ alors (U_n) est décroissante

si $0 < q < 1$ alors (U_n) est croissante

pour $U_0 > 0$ si $q = 1$ alors (U_n) est constante

pour $U_0 < 0$ si $q = 1$ alors (U_n) est constante

- Si $-1 < q < 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 q^n) = 0$ (car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$)

d'où (U_n) est convergente

si $q = 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_0 q^n = U_0$ (car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$) d'où

(U_n) est constante

si $q > 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_0 q^n = \pm\infty$ (car $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$)

d'où (U_n) est divergente

si $q \leq 1$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_0 q^n$ n'existe pas, d'où (U_n) est divergente

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et U_1 le premier terme

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

On a $S = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{(\text{nombre des termes})}}{1 - q}$

Exemple

$$3\times 2 + 3\times 2^2 + \dots + 3 2^n = 3\times 2 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = -3(1-3^n) = -3 + 3^{n+1}$$

2.6.3 Suites récurrentes :

Définition : Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction

On dit que (U_n) est une suite récurrente si (U_n) est définie par :

1) le terme initial : $U_p \in D$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$

* Si $f(D) \subset D$ on dit que f est définie

Exemple :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = 3 + \frac{1}{2} V_n \end{cases}$$

* L'étude de la monotonie de la suite récurrente revient à l'étude de celle de la fonction f.

$$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1})$$

Si f est croissante, (U_n) est monotone de plus

si $f(U_1) - U_1 \geq 0$ (U_n) est croissante

si $f(U_1) - U_1 \leq 0$ (U_n) est décroissante

Si f est décroissante, $U_{n+1} - U_n$ est alternativement positif et négatif

Posons $g = f \circ f$, la fonction g est croissante, les suites (U_{2n}) et (U_{2n+1})

définie par

$$\begin{cases} U_{2n+2} = f(f(U_{2n})) = g(U_{2n}) \\ U_2 = f(U_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_{2n+1} = f(f(U_{2n-1})) = g(U_{2n-1}) \\ U_1 \text{ est donné} \end{cases}$$

Sont donc toutes deux monotones et varient en sens inverse puisque

$$g(U_1) - U_1 = f(f(U_1)) - U_1$$

et

$$g(f(U_1)) - f(U_1) = f(f(f(U_1))) - f(U_1)$$

ont des signes opposés

- pour la convergence des suite récurrentes on a

si f monotone et continue sur D, si la suite (U_n) converge vers ℓ, cette limite vérifiée $\ell = f(\ell)$.