

Université Mohammed Seddik Ben Yahia
Faculté des sciences et technologie
Module: Analyse 1
1ère année ST, 1ère année ingénieur

Série de TD 02

Exercice 01 : On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1+3U_n}{3+U_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.
- 2) Montrer que (U_n) est décroissante. Dédire que (U_n) converge vers un réel l (déterminer l).

Exercice 02 : Soit (U_n) et $(V_n), n \in \mathbb{N}$ deux suites définies par

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad V_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{k!}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 3$.
- 2) Montrer que (U_n) est croissante. Dédire que (U_n) est convergente.
- 3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 3U_n + 2U_{n-1}$.
- 4) Dédire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 5 \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 03 : On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $0 \leq U_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- 2) En déduire la monotonie de (U_n) .
- 3) On considère la suite $(V_n), n \in \mathbb{N}$ définie par $V_n = 2 - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- a) Quel est le signe de (V_n) .
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$. Que peut on conclure.
- c) Montrer par récurrence que $V_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- d) En déduire la limite de la suite (V_n) puis celle de (U_n) .

Exercice 04 : On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n e^{-U_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire la monotonie de (U_n) .
- 3) En déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.
- 4) Soit $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$. Montrer que $U_{n+1} = e^{-S_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- 5) Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 05 : On considère la suite $(U_n), n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \ln(1 + U_n) \end{cases}$$

- 1) Montrer que $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- 2) On pose $g(x) = \ln(1+x) - x$, étudier les variations de g sur $]0, +\infty[$ puis préciser son signe sur $]0, +\infty[$.
- 3) En déduire la monotonie de (U_n) .
- 4) En déduire que (U_n) est convergente puis calculer sa limite.
- 5) Soit $A = \{U_n/n \in \mathbb{N}\}$ déterminer $\inf(A)$ et montrer que $\sup(A)$ est positif.

Exercice 06 : Soient (U_n) et (V_n) , $n \in \mathbb{N}^*$ deux suites définies par

$$U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}, \quad V_n = U_n - \frac{1}{n}.$$

Montrer que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Exercice 07 : Soit f une fonction définie de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}.$$

On considère les deux suites réelles (U_n) et (V_n) , $n \in \mathbb{N}$ définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = f(V_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) Etudier la monotonie de (U_n) et (V_n) .
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|U_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|U_n - V_n|$.
- 3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|U_n - V_n| \leq (\frac{1}{2})^n$.
- 4) En déduire que (U_n) et (V_n) sont adjacentes.
- 5) Calculer la limite de chacune des suites (U_n) et (V_n) .