Chapitre 3
Fonctions réelles à une seule variable

3.1 Définitions :

Définition : On appelle fonction réelle à une variable, toute relation f qui à tout élément x de $\mathbb{R}$, associe au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$ appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f forment l'ensemble de définition (domaine de définition) de f, noté D_f. On écrit :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = y \qquad\qquad x \longmapsto f(x) = y$$

L'ensemble des valeurs de f ou bien ensemble image de f est

$$f(D_f) = \operatorname{Im} f = \{ y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D_f : f(x) = y \}$$

Définition On appelle graphe d'une fonction f, l'ensemble des points $M(x,y)$ où $x \in D_f$ et $y = f(x)$ et on écrit

$$G_r(f) = \{ (x,y) \ / \ x \in D_f \text{ et } y = f(x) \}$$

Définition : Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

1) On dit que f est égale à g et on écrit $f = g$ si et seulement si
$$\forall x \in D \quad f(x) = g(x)$$
2) On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit $f \leq g$ si et seulement si $\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$
3) On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit $f \geq g$

si et seulement si $\forall x \in D \quad f(x) \geq g(x)$.

4) La somme $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$

5) Le produit $(f.g)(x) = f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in D$

6) Le rapport $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D, g(x) \neq 0$

<u>Définition</u>: Soient E, F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f: E \to \mathbb{R}$, $g: F \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(E) \subset F$.

On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur E par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in E$

<u>Exemple</u> Soient

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x+1 \qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x+3$$

on a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = 2x+1+3 = 2x+4$
$= 2(x+2)$

donc $(g \circ f): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2(x+2)$.

on a $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = 2(x+3)+1 = 2x+7$

donc $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x+7$

Il est clair que $(f \circ g) \neq (g \circ f)$

<u>Définition</u>: Soit la fonction f $\quad f: D \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x)$

On dit que f est paire sur D si et seulement si

$$\forall x \in D, (-x) \in D \quad f(-x) = f(x)$$

On dit que f est impaire sur D si et seulement si

$$\forall x \in D \ (-x) \in D \quad f(-x) = -f(x)$$

Exemple : la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ est paire

La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3$ est impaire

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

On dit que f est periodique de période T si et seulement si
$$\exists T > 0, \forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$$

Exemple :

- Les fonction $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont des fonctions périodique de période $T = 2\pi$
- La fonction $h(x) = \tan x$ périodique de période $T = \pi$

Définition : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction

1) On dit que f est croissante si et seulement si
$$\forall x_1, x_2 \in D, \; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
2) On dit que f est strictement croissante si et seulement si
$$\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
3) On dit que f est décroissante si et seulement si
$$\forall x_1, x_2 \in D, \; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
4) On dit que f est strictement décroissante si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Définition: Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

1) On dit que f est majorée sur D si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M, \forall x \in D$$

2) On dit que f est minorée sur D si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq m, \forall x \in D$$

3) On dit que f est bornée sur D si f à la fois majorée et minorée, c'est à dire $\exists m, M \in \mathbb{R} \quad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in D$

Exemple

Les fonctions $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ sont des fonctions bornées

$\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

3.2 Limites et continuité des fonctions:

3.2.1 Limite d'une fonction:

Définition: Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; \forall x \in D \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Définition:

1) On dit que f admet une limite l à droite de x_0 et on note $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D: x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2) On dit que f admet une limite l à gauche de x_0 et on note

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ \forall x \in D : x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Théorème : On a

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = l \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) \right)$$

Limite à l'infinie et limite infini :

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D : \left(x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right)$$

$$\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = l \right) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in D : \left(x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \right)$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \right) \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D / \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A \right)$$

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \right) \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D \left(|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A \right)$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \right) \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D \left(x > B \Rightarrow f(x) > A \right)$$

Théorème : Si une fonction f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.

Théorème :

Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

Opérations sur les limites de fonctions

Théorème : Soient f, g, deux fonctions définies sur D telles que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a

formes indéterminées

$+\infty - \infty$, $0 \times \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = l + l'$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot l'$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha \, f(x) = \alpha l$

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$

3.2.2 Continuité d'une fonction :

Définition : Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction

On dit que f est continue au point x_0 de D si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D \quad |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur D si elle est continue en chaque point x de D.

* Si f n'est pas définie en x_0, elle ne peut être continue en x_0

Définition : Soit f une fonction définie en x_0 et à droite et à gauche de x_0

On dit que f est continue à droite de x_0 si et seulement si

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est continue à gauche de x_0 si et seulement si

$$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

proposition : (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors on a

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ est une fonction continue en x_0
2) $f.g$ est une fonction continue en x_0
3) Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est une fonction continue en x_0
4) $|f|$ est une fonction continue en x_0

proposition :

Soient $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ est continue en x_0.

Definition (Prolongement par continuité) :

Soit f une fonction definie sur $D - \{x_0\}$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on dit que f est prolongeable par continuité et sa fonction prolongée est $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D - \{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable par continuité et sa fonction prolongée $\hat{f}$ est definie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Théorème (Théorème de valeurs intermédiaires):

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires c'est à dire $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

- Si de plus f est strictement monotone, alors le c est unique.

Exemple: Montrer que $f(x) = x^3 - 12x + 1$ possède une seule racine dans l'intervalle $[3,4]$

On a f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[3,4]$ de plus

$f(3) = -8$ et $f(4) = 17$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [3,4] \\ f(3) \cdot f(4) < 0 \end{array}\right\} \text{ alors il existe } c \in]3,4[\; f(c) = 0$$

De plus $f'(x) = 3x^2 - 12 > 0 \quad \forall x \in [3,4]$ donc f est strictement monotone sur $[3,4]$ d'ou l'unicité de la solution c.

3.3 Derivabilité d'une fonction:

Definition: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

On dit que f est derivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et finie

cette limite est appelée derivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$

On écrit
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On définit la dérivée à droite de f en x_0 par
$$f'_d(x_0) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On definit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Et f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f(x_0)$

Exemple:

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x_0 \in]0,+\infty[$ on a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Definition: f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I et l'application $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$

est appelée la fonction dérivée de f.

propriété: Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0

Remarque: La réciproque est fausse

Exemple: $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0 car

$$f'_d(0) = 1 \neq -1 = f'_g(0)$$

proposition: (opérations sur les fonctions dérivables)

proposition: Soient f, g deux fonctions dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions (λf), $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ sont dérivables en x_0, de plus on a

1) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
2) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

3) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{g^2(x_0)}$

<u>proposition</u> (Dérivée d'une fonction composée) :

Soient $f : I \to I'$ et $g : I' \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(f(x_0))$$

<u>Exemple</u> :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = 4x \qquad\qquad x \mapsto \cos x = g(x)$$

Alors $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = \cos 4x$$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x)) = -4 \sin 4x$$

<u>proposition</u> : (Dérivée d'une fonction réciproque)

Si f est dérivable en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

<u>Exemple</u> soit $f(x) = \ln x$ on a $f^{-1}(x) = e^x$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}$$

Les théorèmes qui suivent sont des théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

<u>Théorème de Rolle</u> :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1) f est continue sur $[a,b]$
2) f est dérivable sur $]a,b[$

3) $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$

Théorème : (Théorème des accroissements finis) :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1) f est continue sur $[a,b]$
2) f est dérivable sur $]a,b[$. Alors

$$\exists c \in]a,b[\quad f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

Théorème (Théorème de Cauchy) :

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant

1) f, g sont continues sur $[a,b]$
2) f, g sont dérivables sur $]a,b[$

Alors $\exists c \in]a,b[\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

tel que $g(b) \neq g(a)$ et $g'(c) \neq 0$

Dérivée d'ordre supérieure :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors f' est dite la dérivée d'ordre 1 de f

si f' est dérivable sur I alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f, on la note f'' ou $f^{(2)}$

$$f^{(2)} = f'' = (f')'$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$f^{(0)} = f$$
$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \ \forall n \geq 1$$

On dit que f est de classe C^1 sur I (et on écrit $f \in C^1(I)$)

Si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I

On dit que f est de classe C^n sur I (et on écrit $f \in C^n(I)$) si

f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I

f est dite de classe C^∞ sur I si elle est de classe C^n, $\forall n \in \mathbb{N}$

Théorème (Première règle de l'Hospital):

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

2) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I - \{x_0\}$

alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

La réciproque est en générale fausse

Remarque.

1) La règle de l'Hospitale est vraie lorsque $x \to +\infty$. En effet, posons $x = \frac{1}{y}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0} \frac{-\frac{1}{y^2} f'(\frac{1}{y})}{-\frac{1}{y^2} g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y \to 0} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) Si $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ et f', g' vérifient les conditions du théorème, alors

On peut appliquer encore une fois la règle de l'Hospitale.

Théorème (Deuxième règle de l'Hospitale)

soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I - \{x_0\}$

alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

La remarque précédente est vraie dans ce cas

__Exemple__: $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12}{e^x} = 0$

3.4 Applications aux fonctions élémentaires :

3.4.1 Fonction puissance :

Soit $n \in \mathbb{N}$, On appelle fonction puissance d'exposant n l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^n$$

l'application f est continue sur $\mathbb{R}$

* Si $n = 0$ on a $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ donc f est constante sur $\mathbb{R}$
* Si $n = 1$ on a $f(x) = x$. $\forall x \in \mathbb{R}$ donc f est la fonction identité sur $\mathbb{R}$
* Si n est pair, f est paire et si n est impair f est impaire

* on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f'(x) = (x^n)' = n x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  si n est impair la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

  si n est pair la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$

On a si n est impair la fonction puissance est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$
donc elle est byjective sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie ~~sur~~ $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$
notée par $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

De plus f^{-1} est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\begin{cases} y = x^{\frac{1}{n}} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si n est pair $(n > 0)$: La restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$
Donc la fonction puissance est byjective sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, notée par $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

De plus f^{-1} est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{cases} y = x^{\frac{1}{n}} \\ x \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ y \in [0, +\infty[\end{cases}$$

3.4.2 Fonction logarithme:

La fonction $\ln : \begin{array}{l} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{array}$ est appelée la fonction logarithme népérien, définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ telle que

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$

* On a $\forall x \in [0, +\infty[: (\ln x)' = \frac{1}{x}$
la fonction $\ln x$ est croissante sur $]0, +\infty[$

3.4.3 Fonction exponentielle :

L'application réciproque de la fonction $\ln x$ est continue strictement croissante on l'appelle fonction exponentielle et on note

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto \exp x = e^x$$

elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ de plus on a

$$\begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \ln y \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^x)' = e^x$

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$

3.4.4 Fonctions trigonométriques :

$$\sin \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad\qquad \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$x \mapsto \sin x \qquad\qquad x \mapsto \cos x$$

on a : • Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions continues et dérivable sur $\mathbb{R}$

• Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π

• La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

$$\tan : \mathbb{R} - \{\tfrac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

• La fonction tangente continue est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

et $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$

- La fonction tangente est périodique de période π
- La fonction tangente est impaire

$$\cot : \mathbb{R} - \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- La fonction cotangente est continue est dérivable sur $\mathbb{R} - \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

et $(\cot x)' = -1 - (\cot x)^2 = \dfrac{-1}{(\sin x)^2}$

- La fonction cotangente est périodique de période π
- La fonction cotangente est impaire

3.4.5 Fonctions inverses des fonctions trigonometriques :

Fonction arcsinus :

$$\sin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \sin x$$

est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ car

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad (\sin x)' = \cos x > 0$$

Donc la fonction sinus est bijective sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors elle admet une fonction réciproque appelée arcsin

$$\arcsin [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

on a $\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

et $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Fonction arc cosinus :

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$
$$x \longmapsto \cos x$$

est continue strictement décroissante sur $[0, \pi]$ car

$\forall x \in]0, \pi[\ (\cos x)' = -\sin x < 0$

Donc la fonction cosinus est bijective sur $[0, \pi]$, alors elle admet une fonction réciproque appelée arccos

$$\arccos [-1,1] \to [0, \pi]$$

on a $\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$

et $(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$

<u>Fonction arctangente :</u>

La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ car

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

Donc la fonction tangente est bijective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors elle admet une fonction réciproque appelée arctan $\quad \arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

et $\quad \forall x \in \mathbb{R} \ (\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Fonction arc cotangente :</u>

La fonction $\quad \cot :]0, \pi[\to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

est continue et strictement décroissante sur $]0,\pi[$ car

$$\forall x \in]0,\pi[: (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$$

Donc la fonction $x \mapsto \cot x$ est bijective sur $]0,\pi[$, alors elle admet une fonction réciproque $\cot^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$

appelée fonction arccot qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

et on a $\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ y \in]0,\pi[\end{cases}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\operatorname{arccot})'(x) = \dfrac{-1}{1+\cot^2 y} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

<u>propriétés</u> :

D'après les definitions précedentes on obtient les propriétés suivantes

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
2) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
3) $\arctan(-x) = -\arctan x$
4) $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$
5) $\arccos \frac{1}{x} + \arcsin \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
6) $\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
7) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
8) $\cos(\arctan x) = \sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
9) $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
10) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$
11) $\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3.4.6 Fonctions hyperboliques

* La fonction sinus hyperbolique est définie par

$$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

* La fonction cosinus hyperbolique est définie par

$\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty[$
$x \longmapsto \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

* La fonction tangente hyperbolique est définie par

$\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow]-1, +1[$
$x \longmapsto \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

* La fonction cotangente hyperbolique est définie par

$\coth : \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
$x \longmapsto \coth = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Propriétés des fonctions hyperboliques

D'après les définitions précédentes on obtient les propriétés suivantes

1) $(\sinh x)' = \cosh x$ et $(\cosh x)' = \sinh x$
2) $\cosh x + \sinh x = e^x$
3) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
4) $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$
5) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
6) $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
7) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
8) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$
9) $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

3.4.7 Fonctions inverses des hyperboliques.

La fonction sinus hyperbolique :

$\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sinh x$

est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sinh x)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

donc la fonction $x \longmapsto \sinh x$ est bijective sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction argument sinus hyperbolique (noté par argsinh) et on a

$$\begin{cases} y = \operatorname{argsinh} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a la fonction $\operatorname{argsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \ (\arg\sinh x)'(x) = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Fonction argument cosinus hyperbolique:

La fonction $\cosh : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$, $x \mapsto \cosh x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

donc la fonction $x \mapsto \cosh x$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, alors elle admet une fonction réciproque $\cosh^{-1} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$. continue est strictement croissante, appelée fonction argument cosinus hyperbolique (noté par $\arg\cosh$) et on a

$$\begin{cases} y = \arg\cosh x \\ y \in [1,+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \cosh y \\ y \in [0,+\infty[\end{cases}$$

La fonction $\arg\cosh : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ est définie continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et

$$\forall x \in [1,+\infty[\ (\arg\cos)'(x) = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Fonction argument tangente hyperbolique:

La fonction $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$, $x \mapsto \tanh x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Donc la fonction $x \mapsto \tanh x$ est bijective sur $\mathbb{R}$, alors elle admet une fonction réciproque $\tanh^{-1}]-1,1[\to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante appelée fonction argument tangente hyperbolique (notée $\arg\tanh$) et on a

$$\begin{cases} y = \arg\tanh x \\ x \in]-1,1[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a $\forall x \in]-1,1[\ (\arg\tan)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Fonction cotangente hyperbolique :

La fonction $\coth : \mathbb{R}^* \longrightarrow]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$x \longmapsto \coth x$

est bijective, donc elle admet une fonction réciproque dite argument cotangente hyperbolique (notée par argcoth) et on a

$$\begin{cases} y = \arg\coth x \\ |x| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cot y \\ y \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

propriétés des fonction inverses des hyperboliques :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\arg\sinh x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arg\sinh x) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\arg\cosh x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arg\cosh x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (\arg\tanh x) = -\infty$

6) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (\arg\tanh x) = +\infty$

7) $\arg\sinh x = y = \ln e^x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

8) $\arg\cosh x = y = \ln e^y = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $\forall x \geq 1$

9) $\arg\coth x = y = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $|x| > 1$