

Université Mohammed Seddik Ben Yahia

Faculté des sciences et technologie

Module: Analyse 1

1ère année ST, 1ère année ingénieur

Série de TD 03

Exercice 01 : I) Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \sqrt{-2x^2 + x + 3}$, 2) $f(x) = \frac{|x-4|}{x^2+1}$, 3) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-10}}{x-7}$,

4) $f(x) = \tan(2x)$, 5) $f(x) = \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}$, 6) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$, 7) $f(x) = \ln(\frac{x+1}{3-x})$,

8) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{|x-3|}$, 9) $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{1-x}$, 10) $f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$,

11) $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{2 \cos(x)-1}$.

II) Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ dans les cas suivants

1) $f(x) = 1 - x^3$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

2) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = x^2 + 2$.

Exercice 02 : Soient f et h deux fonctions définies comme suit

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & & h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{et} & & \\ x \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2} & & x \mapsto h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

1) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Etudier la parité des fonctions f et h .

Exercice 03 : Soient f , g deux fonctions définies par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité de f et g .

2) Peut-on prolonger par continuité au point x_0 les fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x_0 = 0, \quad g(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^3+1}, \quad x_0 = -1.$$

Exercice 04 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Déterminer λ pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine réelle sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 05 : Soient a et b deux nombres réels. On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Déterminer b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 06 : Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée lorsqu'elle existe

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 1 + \cos x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 07 : Soient a, b deux réels. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{bx} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) A l'aide de la règle de l'Hôpital calculer la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

2) Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 08 : Calculer lorsqu'elle existe les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(1 - \cos x)}{\sin x}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 1} - x), \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 3}{(x+2) \ln(x+1)}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (1-a)x + a}{x^2 - a^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 09 : Montrer que

$$1) \forall x \in \mathbb{R} : \cosh x + \sinh x = e^x. \quad 2) \forall x \in \mathbb{R} : \cosh x - \sinh x = e^{-x}.$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} : \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad 4) \forall x \in \mathbb{R} : (\sinh)'(x) = \cosh x.$$

$$5) \forall x \in \mathbb{R} : (\cosh)'(x) = \sinh x. \quad 6) \forall x \in \mathbb{R} : (\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Exercice 10 : Montrer que

$$1) \forall x \in]-1, 1[: (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 2) \forall x \in]-1, 1[: (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3) \forall x \in \mathbb{R} : (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad 4) \forall x \in \mathbb{R} : (\operatorname{arccot})'(x) = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$5) \forall x \in]-1, 1[: (\operatorname{argsinh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \quad 6) \forall x \in]-1, 1[: (\operatorname{argtanh})'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$7) \forall x \geq 1 : (\operatorname{argcosh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Exercice 11 : I) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes

1) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$. 2) $g(x) = \arccos(\sqrt{2-x^2})$.

3) $h(x) = \arccos(2x+1) + \arcsin(3x^2)$.

II) Calculer les dérivées des fonctions f et g .

Exercice 12 : 1) Simplifier les expressions suivantes

$\cos(2 \arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$, $\sin(\arctan x)$, $sh(\operatorname{argcosh} x)$, $th(\operatorname{argcosh} x)$, $ch(3 \operatorname{argcosh} x)$.

II) Résoudre les équations suivantes

1) $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$. 2) $\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$.

3) $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

III) Vérifier que

1) $\forall x \in]-1, 1[\quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

2) $\forall x \in]0, +\infty[\quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.