Chapitre 4
Intégrales simples

5.1 Intégrale de Riemann :

Définition (subdivision)

une subdivision d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est une partie finie fermé de $(n+1)$ éléments $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$

on appelle "pas" de la subdivision le réel $M = \underset{0 \le i \le n-1}{\mathrm{Max}} (a_{i+1} - a_i)$

Définition. une somme de Riemann d'une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles relativement à une subdivision $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ de $[a,b]$ est le réel défini par

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(x_i) \quad \text{où } x_i \in [a_i, a_{i+1}]$$

Remarque : Lorsque $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$: on parle de la subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$

le nombre $\frac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision

Théorème : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue

Les sommes de Riemann relatives à la fonction f convergent toutes vers la même limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 on noté cette limite $\int_a^b f(x)\,dx$ et on dit que f est Riemann, intégrable

Remarque :

La variable d'intégration x est une variable muette, c'est à dire qu'elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable (qui n'intervient pas déja ailleurs)

proposition : Soient f, g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ $c \in [a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a

1) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (règle de Chasles)

7) Si $f(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

8) Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (a,b)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

9) Si $n \leq f(x) \leq m$ $\forall x \in (a,b)$ $(n,m \in \mathbb{R})$ alors $n(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq m(b-a)$

10) Si $n \leq f(x) \leq m$ et $g(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ $(n,m \in \mathbb{R})$, alors

$$n\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq m\int_a^b g(x)\,dx$$

<u>proposition</u>: (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Alors on a

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)$$

<u>Théorème</u>: (Théorème de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles

il existe $c \in [a,b]$ tel que: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

5.2 Les primitives

<u>Definition</u> Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction, I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On appelle "primitive" de f sur I toute fonction

$F: I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Une primitive d'une fonction f, représentée par $\int f(x)\,dx$ s'appelle aussi une intégrale indéfinie de f. L'ensemble de toute les primitives de f s'écrit $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ / $c \in \mathbb{R}$

<u>Exemple</u>: La fonction $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 2x$ est la primitive de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$

et toutes les primitives de la fonction $x \longmapsto 3x^2 - 8x + 2$ sur $\mathbb{R}$ sont $x \longmapsto x^3 - 4x^2 + 2x + c \; / \; c \in \mathbb{R}$

On écrit $\int (3x^2 - 8x + 2)\, dx = x^3 - 4x^2 + 2x + c \; / \; c \in \mathbb{R}$

La primitive de la fonction $x \longmapsto \cos 2x$ est $x \longmapsto \frac{1}{2} \sin 2x$ sur $\mathbb{R}$ et

toutes les primitives de la fonction $x \longmapsto \cos 2x$ sur $\mathbb{R}$ sont

$$\int (\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c \; / \; c \in \mathbb{R}$$

<u>Remarque</u>: La primitive d'une fonction n'est pas unique.

<u>Exemple</u>: Soit la fonction $f(x) = 4x + 3$

on a: $F(x) = 2x^2 + 3x$ $\quad G(x) = 2x^2 + 3x + 1$ $\quad H(x) = 2x^2 + 3x + 2$

sont les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u>: Si on connait une primitive F de f, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où c est une constante

<u>propriétés fondamentales</u>:

Soient F et G des primitives respectivement de f et g sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors

1) $\int (f+g)(x)\, dx = F(x) + G(x) \quad \forall x \in I$

2) $\int (\lambda f)(x)\, dx = \lambda F(x) \quad \forall x \in I$

3) $\int (fG + Fg)\, dx = (F G)(x) \quad \forall x \in I$

4) $\int \left(\frac{fG - Fg}{G^2}\right)(x)\, dx = \left(\frac{F}{G}\right)(x) \quad \forall x \in I$, (avec $G(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$)

<u>Primitives des fonctions usuelles</u>:

1) $\int \lambda\, dx = \lambda x + c \; / \; \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad$ 2) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$

3) $\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

4) $\int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + c$ $a \neq 0$

5) $\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$ $a \neq 0$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$ $|x| < 1$

où c est une constante dans $\mathbb{R}$

5.3 Intégrale définie :

proposition : Si F est une primitive de la fonction f sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Cette proposition montre toute l'importance que représente la connaissance des primitives des fonctions continues dans le calcul des intégrales

Remarque : Il y a une différence entre l'intégrale définie et l'intégrale indéfinie d'une fonction (il ne faut pas confondre les deux)

$\int f(x)\, dx$ s'appelle une intégrale indéfinie de f. c'est une fonction primitive de f.

$\int f(x)\, dx$ s'appelle une intégrale définie de f. C'est un nombre réel

Remarque $\int_a^b f'(x)\, dx = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$

Exemple $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

5.4 Techniques de calcul des primitives :

5.4.1 Intégration par parties :

La première méthode de calcul des primitives est donnée par la formule dite "intégration par parties", Elle est basée sur la formule de dérivation d'un produit

proposition : Soient $U, V : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors $\int U(x) V'(x)\, dx = U(x) V(x) - \int U'(x) V(x)\, dx$

preuve :

$$\left(U(x)V(x)\right)' = U'(x)V(x) + V'(x)U(x)$$

donc $\int U(x)V'(x)\,dx = \int \left(U(x)V(x)\right)'dx - \int U'(x)V(x)\,dx$

D'où $\int U(x)V'(x)\,dx = U(x)V(x) - \int U'(x)V(x)\,dx$

Exemple : $\int x e^x\,dx$

$$\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = e^x \end{cases}$$

$$\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

Remarque : La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme $\int x^k(\sin x)\,dx$, $\int x^k(\cos x)\,dx$
$\int x^k e^{ax}\,dx$, $\int x^k(\ln x)\,dx$

5.1.2 Intégration par changement de variable :

Voici une second méthode de calcul de primitives. Elle s'appuie sur la formule de dérivation d'une fonction composée

Formules de changement de variable :

si le calcul de $\int f(x)\,dx$ s'avère difficile, on remplace x par $g(t)$ dérivable et donc $dx = g'(t)\,dt$ et on aura

$$\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$$

Remarque : Le succès de l'intégration dépend de notre habileté à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs

un changement de variable comporte trois étapes :

1) choisir la fonction $g(t)$ (c'est la seule partie où il faut faire preuve d'imagination et d'expérience)

2) écrire $dx = g'(t)dt$ pour préparer le changement de variable

3) Appliquer la formule du changement de variable (ne pas oublier de changer les bornes quand il s'agit d'une intégrale définie)

<u>Exemple</u>: $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$

On pose $t = x-1$ donc $dt = dx$

donc $\int \frac{dx}{(x-1)^5} = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5} dt = -\frac{1}{4} t^{-4} + c \ / c \in \mathbb{R}$

$= -\frac{1}{4(x-1)^4} + c \ / c \in \mathbb{R}$

$\int \sin^3 x \cos x \, dx$

On pose $t = \cos x$ donc $dt = -(\sin x) dx$ d'où $dx = \frac{-1}{\sin x} dt$

$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int \sin^3 x \; t \frac{-1}{\sin x} dt = -\int (\sin^2 x) \, t \, dt$

$= -\int (1 - \cos^2 x) t \, dt = -\int (1 - t^2) t \, dt$

$= -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + c \ / c \in \mathbb{R}$

$= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + c \ / c \in \mathbb{R}$

<u>5.5 complément sur le calcul des primitives :</u>

<u>5.5.1 Intégration des fractions rationnelles</u>

une intégrale d'une fonction rationnelle peut toujours, à l'aide de la décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples, se ramener à une combinaison linéaire d'intégrales de la forme $\int \frac{1}{(x+\lambda)^n} dx$, $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$ où

$a, b, p, q, \lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

Donc il suffit de connaître les valeurs des intégrales de ces types pour en déduire celles des intégrales de fonctions rationnelles

<u>Intégrale du type $\int P(x)\,dx$</u>

Dans le cas où P est un polynôme, on intègre terme à terme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

alors $\int P(x)\,dx = \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)\,dx$

$$= \int a_n x^n dx + \int a_{n-1} x^{n-1} dx + \dots + \int a_1 x\,dx + \int a_0\,dx$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_n}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

<u>Intégrale du type $\int \frac{dx}{x+\lambda}$</u> $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{x+\lambda} = \ln|x+\lambda| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

<u>Intégrale du type $\int \frac{dx}{(x+\lambda)^n}$</u> et $n > 1$

$$\int \frac{dx}{(x+\lambda)^n} = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x+\lambda)^{n-1}} + c \mid c \in \mathbb{R}$$

<u>Intégrale du type</u> $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$ où $a, b, p, q \in \mathbb{R}$

Si x^2+px+q possède deux racines réelles α et β donc

$$\frac{ax+b}{x^2+px+q} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A}{x-\alpha}\,dx + \int \frac{B}{x-\beta}\,dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + c$$
$c \in \mathbb{R}$

Exemple $\int \frac{dx}{x^2-1}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{2(x-1)}\,dx - \int \frac{dx}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c \,/\, c \in \mathbb{R}$$

Si x^2+px+q n'a pas de racines réelles, écrivons

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

En posant $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$ on obtient $x^2+px+q = (x-\alpha)^2+\beta^2$

On fait maintenant le changement de variable $x-\alpha = \beta t$ et donc $dx = \beta\,dt$ et $(x-\alpha)^2+\beta^2 = \beta^2(t^2+1)$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{Mt+N}{t^2+1}\,dt = \int \frac{Mt}{t^2+1}\,dt + \int \frac{N}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+1) + N\arctan t + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right) + N\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

Exemple $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$$

En posant $x+1 = 2t$ (et donc $dx = 2dt$) on obtient

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{2t+3}{4(t^2+1)}\,2\,dt = \int \frac{4t}{4(t^2+1)}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \frac{3}{2}\arctan t + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{2}\right) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

Intégration des fractions rationnelles en e^x

On utilise le changement de variable $t = e^x$ et donc $dt = e^x dx$

$dx = \frac{dt}{t}$

Exemple $\int \frac{dx}{3-2e^x}$

$$\int \frac{dx}{3-2e^x} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{3-2t} = \int \frac{dt}{t(3-2t)} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{3}\int \frac{-2dt}{3-2t}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{3}\ln|3-2t| + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\ln|3-2e^x| + c \quad | c \in \mathbb{R}$$

5.5.2 Intégrale du type $\int P(x)\, e^{\lambda x} dx$ où P est un polynôme et $\lambda \in \mathbb{R}^*$

On peut effectuer des intégrations par parties successives selon le degré de P, mais on doit réserver cette méthode au cas où deg P est petit. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et de chercher une primitive $P(x)\, e^{\lambda x}$ sous la forme $Q(x)\, e^{\lambda x}$ avec deg P = deg Q

Exemple $\int (5x^2+3x-1)\, e^{-x} dx$

On sait que $\int (5x^2+3x-1)\, e^{-x} dx = (ax^2+bx+c)\, e^{-x}$ et on obtient a, b, c de la formule suivante

$$\left[(ax^2+bx+c)\, e^{-x}\right]' = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\, e^{-x} = (5x^2+3x-1)\, e^{-x}$$

par identification on a

$$\begin{cases} -a = 5 \\ 2a-b = 3 \\ b-c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 2a-3 \\ c = b+1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} a = -5 \\ b = -13 \\ c = -12 \end{array}$$

$$\int (5x^2+3x-1)\, e^{-x} dx = (-5x^2-13x-12)\, e^{-x} + c \;/\; c \in \mathbb{R}$$

Exemple $\int (x^4-1)\, e^{2x}\, dx$

posant $\int (x^4-1)\, e^{2x} dx = Q(x)\, e^{2x}$ avec $Q(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
$a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$\left(Q(x)\,e^{2x}\right)' = \left(4ax^3+3bx^2+2cx+d\right)e^{2x} + \left(2ax^4+2bx^3+2cx^2+2dx+2e\right)e^{2x}$$
$$= \left(2ax^4+(4a+2b)x^3+(3b+2c)x^2+(2c+2d)x+d+2e\right)e^{2x}$$
$$= (x^4-1)\,e^{2x}$$

donc
$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a+2b = 0 \\ 3b+2c = 0 \\ 2c+2d = 0 \\ d+2e = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{3}{2} \\ d = -\frac{3}{2} \\ e = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Alors $Q(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$

d'où $\int (x^3-1)\, e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + c \;/\; c \in \mathbb{R}$

5.5.3 Intégration de certaines fonctions trigonométriques :

5.5.3.1 Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles :

Soit f une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$. En effectuant le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$, les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ s'expriment par :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2},$$
$$\cot x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

Exemple : $\int \frac{1}{\cos x}\, dx$

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2}{1-t^2}\, dt = \int \frac{1}{1+t}\, dt + \int \frac{dt}{1-t}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} dx = \ln|1+t| - \ln|1-t| + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c \mid c \in \mathbb{R}$$

<u>5.5.B.2</u> Intégrale de type $\int \cos^p x \sin^q x \, dx$ p et $q \in \mathbb{N}$

<u>1ère cas</u> p est impair $(p = 2k+1 \mid k \in \mathbb{N})$

$$\int \cos^p x \sin^q x \, dx = \int \cos^{2k+1} x \sin^q x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^k \sin^q x \cos x \, dx$$

Le changement de variable $t = \sin x$ $(dt = \cos x \, dx)$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $\int (1-t^2)^k t^q dt$ c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme

<u>Exemple:</u> $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x)^2 \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$= \int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3} + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{\sin^3 x}{3} + c \mid c \in \mathbb{R}$$

<u>2ème cas</u> q est impair $(q = 2k+1 \mid k \in \mathbb{N})$

$$\int \cos^p x \sin^q x \, dx = \int \cos^p x \sin^{2k+1} x \, dx = \int \cos^p x (1-\cos^2 x)^k \sin x \, dx$$

Le changement de variable $t = \cos x$ $(dt = -\sin x \, dx)$ ramène le calcul de la dernière au calcul de $-\int t^p (1-t^2)^k dt$ c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme

<u>Exemple:</u> $\int \cos^6 x \sin^3 x \, dx$

$$\int \cos^6 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^6 x (1-\sin^2 x) \sin x \, dx = -\int t^6 (1-t^2) dt$$

$$\int \cos^6 x \sin^3 x \, dx = \int (t^8 - t^6) \, dt = \frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{7}t^7 + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{9}\cos^9 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

<u>3ème cas:</u> Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x \, dx$ à la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle

<u>5.5.3.3 Intégrale de type $\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x) \, dx$</u> $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

On utilise la formule suivante

$$(\cos \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right)$$

donc $$\int (\cos \alpha x)(\cos \beta x) \, dx = \frac{1}{2}\int \cos((\alpha+\beta)x) \, dx + \frac{1}{2}\int \cos((\alpha-\beta)x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+\beta)} \sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)} \sin(\alpha-\beta)x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$\alpha+\beta \neq 0$ $\qquad$ $\alpha-\beta \neq 0$

<u>Exemple:</u> $\int (\cos 5x)(\cos x) \, dx$

$$\int (\cos 5x)(\cos x) \, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 6x) \, dx + \frac{1}{2}\int (\cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right) + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

<u>5.5.3.3 Intégrale de type $\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x) \, dx$</u> $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

On utilise la formule suivante

$$(\sin \alpha x)(\cos \beta x) = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\right]$$

donc $$\int (\sin \alpha x)(\cos \beta x) \, dx = \frac{1}{2}\int \sin((\alpha+\beta)x) \, dx + \frac{1}{2}\int \sin((\alpha-\beta)x) \, dx$$

$$= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)} \cos(\alpha+\beta)x - \frac{1}{2(\alpha-\beta)} \cos(\alpha-\beta)x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$\alpha+\beta \neq 0$ $\qquad$ $\alpha-\beta \neq 0$

Exemple: $\int (\sin 4x)(\cos 6x)\, dx$

On a $\int (\sin 4x)(\cos 6x)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(10x)\, dx + \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos(-2x)\right) + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{-1}{20}\cos 10x + \frac{1}{4}\cos 2x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

5.5.3.4 Intégrale de type $\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$

On utilise la formule suivante

$$(\sin \alpha x)(\sin \beta x) = \frac{1}{2}\left[-\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\right]$$

donc $\int (\sin \alpha x)(\sin \beta x)\, dx = -\frac{1}{2}\int \cos[(\alpha+\beta)x]\, dx + \frac{1}{2}\int \cos[(\alpha-\beta)x]\, dx$

$$= \frac{-1}{2(\alpha+\beta)}\sin(\alpha+\beta)x + \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sin(\alpha-\beta)x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$\alpha+\beta \neq 0 \qquad \alpha-\beta \neq 0$

Exemple $\int (\sin 3x)(\sin 2x)\, dx$

On a: $\int (\sin 3x)(\sin 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int [-\cos 5x + \cos x]\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\sin 5x + \sin x\right] + c \mid c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + c \mid c \in \mathbb{R}$$

5.5.4 Intégrales des fonctions contenant des radicaux :

Fonction de la forme $f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où f est soit un polynôme, soit une fraction rationnelle. On suppose que $ad - cb \neq 0$ et $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$, dans ce cas le changement de variable adéquat est $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, il permet de ramener le calcul de l'intégrale à celui de l'intégrale d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

Exemple : $I=\int \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x+2}{x}}\,dx$

On pose $t=\sqrt{\frac{x+2}{x}}$ donc $t^2=\frac{x+2}{x}$, $x=\frac{2}{t^2-1}$

$dx=\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt$ donc

$$I=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\,t\,\frac{-4t}{(t^2-1)^2}\,dt=\int\frac{-4t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}$$

$$\frac{-4t^2}{(t^2+1)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}$$

$$=\frac{A(t+1)(t^2+1)+B(t-1)(t^2+1)+(Ct+D)(t^2-1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}$$

$$=\frac{At^3+At+At^2+A+Bt^3+Bt-Bt^2-B+Ct^3-Ct+Dt^2-D}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}$$

$$=\frac{(A+B+C)t^3+(A-B+D)t^2+(A+B-C)t+A-B-D}{(t-1)(t+1)(t^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=-4 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases}$$

$A=-1$
$B=1$
$C=0$
$D=-2$

donc $I=-\int\frac{dt}{t-1}+\int\frac{dt}{t+1}+\int\frac{-2}{t^2+1}\,dt=-\ln|t-1|+\ln|t+1|-2\arctan t+c \mid c\in\mathbb{R}$

$$=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-2\arctan t \mid c\in\mathbb{R}$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+1}{\sqrt{\frac{x+2}{x}}-1}\right|-2\arctan\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}\right)+c \quad \mid c\in\mathbb{R}$$