
Written test N°1

Exercise 01 :

Let $a > 0$ and $b > 0$. For $n \in \mathbb{N}^*$ and $x \in \mathbb{R}$, Let

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Give an asymptotic equivalent, as $n \rightarrow +\infty$,

1. of the sequence $(u_n)_n \in \mathbb{N}^*$ defined by

$$u_n = f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b).$$

2. And of the sequence $(v_n)_n \in \mathbb{N}^*$ defined by

$$v_n = e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}.$$

Exercise 02 :

Let $n \in \mathbb{N}^*$ and consider the equation

$$(E_n) : \quad x^n + x = 1.$$

1. Show that, for every $n \in \mathbb{N}^*$, the equation (E_n) admits a unique solution $x_n \in [0, 1]$.
2. Show that $(x_n)_n$ converges, and $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.
3. Let $y_n = x_n - 1$. Show that, for sufficiently large n ,

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2\frac{\ln n}{n}.$$

(using the developpement $\ln(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \dots + o(t^n)$.)

4. Show that $\ln(y_n) \sim -\ln n$.

5. Deduce the asymptotic expansion $x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercise 03 :

Calculate the first two non-zero terms of the asymptotic expansion of the function f defined by

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \left(1 - \frac{x}{e^x - 1}\right),$$

with respect to the sequence $\delta_n(x) = x^{n-1}$ in the neighborhood of $x = 0$.

Exercice 01 :

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$,

1. de la suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}^*$ définie par $u_n = f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.
2. Et de la suite $(v_n)_n \in \mathbb{N}^*$ définie par $v_n = e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Exercice 02 :

Soit pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$(E_n) : \quad x^n + x = 1.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution $x_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que $(x_n)_n$ convergente, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.
3. Soit $y_n = x_n - 1$. Montrer que, pour n assez grand,

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2\frac{\ln n}{n}.$$

(à l'aide du développement $\ln(1+t) = t + \frac{t^2}{2} + \dots + o(t^n)$.)

4. Montrer que $\ln(y_n) \sim -\ln n$.
5. En déduire le développement asymptotique de $x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 03 :

Calculer les deux premiers termes non nuls du développement asymptotique de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \left(1 - \frac{x}{e^x - 1}\right),$$

suivant la suite $\delta_n(x) = x^{n-1}$ au voisinage de $x = 0$.