CORRIGE INTERROGATION N1

Exercice 01 (7pts)

I. Un mouvement vibratoire caractérisé par:

$$x(t) = 2\ \cos(4t + 6)\ \text{[m]}.$$

1. L'amplitude $A = 2\ m$ **(0,25 pts)**

La pulsation $\omega = 4\ rad/s$ **(0,25 pts)**

2. La fréquence : $f = 2\pi\omega = 25,13\ Hz$ **(1pt)**

la période : $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{25,13} = 0,04\ s$ **(1pt)**

Le déphasage initiale $\varphi = 6\ rad$ **(0,5 pts)**

3. La vitesse $v(t) = -8\ sin(4t + 6)\ \left[\frac{m}{s}\right]$ **(1pt)**

l'accélération $a(t) = -32\ \cos(4t + 6)[m/s^2]$ **(1pt)**

II. $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

L'amplitude $A = 2\ .10^{-3}\ m$

La pulsation $\omega = 2\pi.f = 2\pi.100 = 628\ rad/s$

$v(0) = 0 \Leftrightarrow A\omega\cos\varphi = 0$ **(0,5 pts)** $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ **(0,5 pts)**

$$x(t) = 2\ .10^{-3}\ \sin\left(628\ t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \textbf{(1pt)}$$

Exercice 02 (13pts)

1. Le Lagrangien du système : **Ddl=1** $x = R\theta$ **(0,5 pts)**

- L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(R-b)^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-b)^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-b)^2\dot{\theta}^2 \quad \textbf{(1 pt)}$$

- L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(R\theta + a\theta)^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(R\theta + a\theta)^2 \quad \textbf{(1 pt)}$$

- Le Lagrangien :

$$L = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-b)^2\dot{\theta}^2 - 2k_1(R\theta)^2 - \frac{1}{2}k_2(R+a)^2\theta^2 \quad \textbf{(1 pt)}$$

2.

- L'équation différentielle du mouvement :

Système libre non amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \textbf{(1 pt)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2\right]\dot{\theta} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2\right]\ddot{\theta} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -4k_1R^2\theta - k_2(R+a)^2\theta \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R-b)^2\right]\ddot{\theta} + [4k_1R^2 + k_2(R+a)^2]\theta = 0 \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{[4k_1R^2+k_2(R+a)^2]}{\left[\frac{3}{2}MR^2+m(R-b)^2\right]}\theta = 0 \quad \textbf{(1 pt)}$$

- La pulsation propre :

$$\omega_0^2 = \frac{[4k_1R^2+k_2(R+a)^2]}{\left[\frac{3}{2}MR^2+m(R-b)^2\right]} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{[4k_1R^2+k_2(R+a)^2]}{\left[\frac{3}{2}MR^2+m(R-b)^2\right]}}\ rad/s \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

- La période propre : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{[4k_1R^2+k_2(R+a)^2]}{\left[\frac{3}{2}MR^2+m(R-b)^2\right]}}}\ s$ **(1 pt)**

3. La solution générale :

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \textbf{(0,75 pts)}$$

$$\dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \textbf{(0,75 pts)}$$

$$\begin{cases}\theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A\sin\varphi = \theta_0 \\ \omega_0 A\cos\varphi = 0\end{cases} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\varphi = \frac{\pi}{2} \\ A = \theta_0\end{cases} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\theta(t) = \theta_0\sin\left(\sqrt{\frac{[4k_1R^2+k_2(R+a)^2]}{\left[\frac{3}{2}MR^2+m(R-b)^2\right]}}\ t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \textbf{(1 pt)}$$