

Signaux aléatoires et processus stochastiques

Série d'exercices n° 1

Exercice 1

Pour chacun des systèmes continus suivants, $x(t)$ est l'entrée et $y(t)$ est la sortie. Parmi les propriétés suivantes : (1) linéaire (1) sans mémoire (3) invariant dans le temps (4) causal Indiquer celles qui sont satisfaites et celles qui ne sont pas satisfaites par ces systèmes. Justifier votre réponse.

- (a) $y''(t) + 3y'(t) = 2x'(t) + x(t)$ (b) $y''(t) + 3y(t)y'(t) = 2x'(t) + x(t)$
(c) $y''(t) + 3tx(t)y'(t) = 2x'(t)$ (d) $y''(t) + 3y'(t) = 2x^2(t) + x(t+2)$
(e) $y(t) + 3 = x^2(t) + 2x(t)$ (f) $y(t) = 2x(t+1) + 5$
(g) $y''(t) + e^{-t}y'(t) = |x'(t-1)|$ (h) $y(t) = x^2(t) + 2x(t+1)$
(i) $y''(t) + \cos(2t)y'(t) = x'(t+1)$

Exercice 2

Parmi les propriétés suivantes :

(1) linéaire (1) sans mémoire (3) invariant dans le temps (4) causal Indiquer celles qui sont satisfaites et celles qui ne sont pas satisfaites par les systèmes discrets suivants. Justifier votre réponse. Dans chaque exemple, $y(n)$ désigne la sortie du système et $x(n)$ son entrée.

- a) $y(n) = x(-n)$ b) $y(n) = x(n-1) - 2x(n-8)$ c) $y(n) = nx(n)$

$$(d) y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x(n+1), & n \leq -1 \end{cases} \quad (e) y(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x(n), & n \leq -1 \end{cases}$$

- f) $y(n) = x(4n+1)$

Exercice 3

Soit le système représenté sur la figure 1. Déterminer la réponse impulsionnelle de chaque sous système, la réponse impulsionnelle globale et les sorties $y(t)$ et $z(t)$ si l'entrée est $x(t) = 2e^{-t}u(t)$. On prend $R=1 \Omega$ et $C=1 F$.

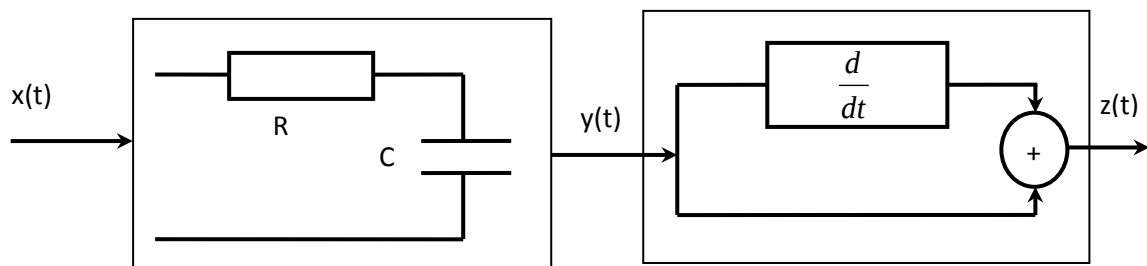


Figure 1

Exercice 4

Déterminer la convolution $y(n) = x(n) * h(n)$ discrète des séquences suivantes :

$$x(n) = \{1, 2, 0, 1\} \quad h(n) = \{2, 2, 3\}$$

↑

↑

$$x(n) = \{-3, -2, -1, 0, 1\} \quad h(n) = \{4, 3, 2\}$$

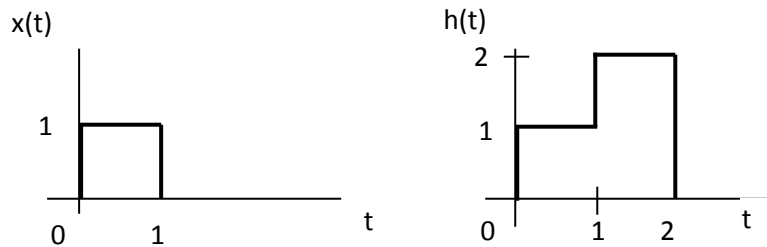
↑

↑

Le symbole ↑ indique l'origine $n=0$.

Exercice 5

Soient les signaux $x(t)$ et $h(t)$ représentés sur la figure 2. Calculer la fonction d'intercorrélation de $x(t)$ et $h(t)$ notée $\varphi_{xh}(\tau)$. Tracer $\varphi_{xh}(\tau)$. Retrouver le résultat en utilisant la relation entre la fonction d'intercorrélation et la convolution.

**Exercice 6**

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux discrets réels à énergie finie ayant pour transformées de Fourier (TF), respectivement, $X(\omega)$ et $Y(\omega)$. On définit la fonction d'inter-corrélation $\varphi_{xy}(\tau)$ par :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(t)dt$$

De manière similaire, on définit $\varphi_{yx}(\tau)$, $\varphi_{xx}(\tau)$ et $\varphi_{yy}(\tau)$. Soient $\Phi_{xy}(\omega)$, $\Phi_{yx}(\omega)$, $\Phi_{xx}(\omega)$ et $\Phi_{yy}(\omega)$ les TF respectives de $\varphi_{xy}(\tau)$, $\varphi_{yx}(\tau)$, $\varphi_{xx}(\tau)$ et $\varphi_{yy}(\tau)$.

1. Montrer que $\varphi_{xy}(-\tau) = \varphi_{yx}(\tau)$.
2. Exprimer $\Phi_{xy}(\omega)$ en fonction de $X(\omega)$ et $Y(\omega)$.
3. Montrer que $\Phi_{xx}(\omega)$ est réel et non négative pour tout ω .
4. Supposons que $x(t)$ soit l'entrée d'un système linéaire et invariant dans le temps, de réponse impulsionnelle réelle $h(t)$ et de réponse en fréquence $H(\omega)$. On note $y(t)$ la sortie de ce système. Exprimer $\Phi_{xy}(\omega)$ et $\Phi_{yy}(\omega)$ en fonction de $\Phi_{xx}(\omega)$ et $H(\omega)$.
5. Soit $x(t) = e^{-at}u(t)$ et $h(t) = e^{-bt}u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon unité et $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. Calculer $\Phi_{xx}(\omega)$, $\Phi_{xy}(\omega)$ et $\Phi_{yy}(\omega)$ en utilisant les résultats précédents.

Signaux aléatoires et processus stochastiques
Série d'exercices n° 2

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire (v.a) dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Représenter graphiquement F(x)
- (b) Déterminer la fonction densité de probabilité correspondante.
- (c) Quelle est la moyenne de la v.a X ?
- (d) calculer $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3. La fonction de masse de Z est la suivante : $p(0) = 1/4$, $p(1) = 1/2$, $p(2) = 1/8$, $p(3) = 1/8$

- (a) Représenter graphiquement la fonction de répartition de Z.
- (b) Calculer $E[Z]$.
- (c) Calculer la variance de Z.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction densité de probabilité f(x) donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} cx & \text{si } 0 < x < 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1. Déterminer la valeur de c.
- 2. Exprimer la fonction de répartition de X.
- 3. Calculer $E[X]$ et $\text{var}[X]$.
- 4. On pose $Y = 0.5X + 2$. Donner la fonction de répartition de Y.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire normale N (0, 1).

- 1. Calculer $P(X \leq 2)$ et $P(-1 < X < 0.5)$.
- 2. Calculer a tel que $P(|X| < a) = 0.8$ et b tel que $P(X < b) = 0.31$.
- 3. Soit Y une variable aléatoire normale de moyenne 1 et d'écart type $\sigma=4$. Calculer les probabilités suivantes : $P(Y \leq 4)$, b) $P(0 \leq Y \leq 4)$, c) $P(Y \leq 4 / Y \geq 0)$.

Exercice 5

Les v.a X et Y sont normales de moyennes nulles, de variances σ^2 et indépendantes. Montrer

que si $Z = |X - Y|$ alors $E[Z] = \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}$ et $E[Z^2] = 2\sigma^2$.

Signaux aléatoires et processus stochastiques
Série d'exercices n° 3

Exercice 1

Dans l'expérience de lancer d'une pièce de monnaie, on forme le processus $X(t)$ comme suit :

$X(t)=\sin 2\pi t$ si face

$X(t)=2t$ si pile

a) Calculer $E[X(t)]$

b) Déterminer $F(x ; t)$ pour $t=0.25$ et $t=0.5$.

Exercice 2

a) Soit le processus stochastique défini par $X(t)=a e^{j\omega t}$, où a est une variable aléatoire.

Déterminer la fonction d'autocorrélation $R(t_1, t_2)$.

b) Les variables aléatoires a_i sont non corrélées, de moyennes nulles et de variances σ_i^2 . On forme le processus

$$X(t) = \sum_i a_i e^{j\omega_i t}$$

Déterminer la fonction d'autocorrélation $R(t_1, t_2)$.

Exercice 3

Soit $X(t)$ un processus stochastique stationnaire réel. Montrer que

a) $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$.

b) $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$

Exercice 4

On donne deux processus stochastiques indépendants d'espérances nulles, avec

$$E[X(t)X(t+\tau)] = Ae^{|\tau|} \quad \text{et} \quad E[Y(t)Y(t+\tau)] = B \cos(\tau) + a^2$$

où a, A et B sont des constantes.

a) Soit le processus stochastique donné par $Z(t)=X(t) + Y(t)$

i) Déterminer la fonction de d'autocorrélation de $Z(t)$ notée $R_Z(\tau)$.

ii) Calculer la variance de $Z(t)$.

b) Soit le processus stochastique donné par $P(t)=X(t).Y(t)$

i) Déterminer la fonction de d'autocorrélation de $P(t)$ notée $R_p(\tau)$.

ii) Calculer la variance de $P(t)$.

Exercice 5

Soit un processus stochastique normal ayant pour espérance et fonction d'autocorrélation $\mu_x=0$ et $R_{xx}(\tau) = 4 \exp(-2|\tau|)$, respectivement. On forme les variables aléatoires $Z=X(t+1)$ et $W=X(t-1)$.

Trouver $E[ZW]$ et $E[(Z+W)^2]$.