Analyse fonctionnelle

fatiha.mesdoui@univ-jijel.dz

Chapitre 01
Notions de Bases

1.1 les espace vectoriel (les espace linéaires)

Dans ce cours le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def Soit X un ensemble muni deux operations addition "+" et multiplication "." tel que :

I. addition "+"

i. associative

$\forall x, y, z \in X : (x+y)+z = x+(y+z)$

ii. commutative

$\forall x, y : x+y = y+x$

iii. admet un element neutre :

$\exists e \in X ; \forall x \in X : x+e = x$

IV admet un inverse :

$\forall x \in X, \exists x' \in X : x+x' = e$

donc $(X ; +)$ est un groupe ablien

II multiplication

i. associative

$\alpha(\beta\lambda) = (\alpha.\beta).\lambda$

ii. admet un ellement neutre

$1 . \alpha = \alpha$

III. distributivité

$\forall x, y \in X, \alpha . \beta \in \mathbb{K}$

$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Alors :

$(X ; + ; .)$ est un espace vectoriel si il est stable par $+ ; .$

$x+y \in X \quad , \alpha . x \in X$

$\forall x . y \in X \quad , \forall \alpha \in \mathbb{K}$

dans la pratique il suffit de montrer la stabilité de + et . car generalement les loi donnée sont des loi usuelle

exp

1. $(\mathbb{R} ; + ; .)$
2. $(\mathbb{R}^n ; + , .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vect mais $\mathbb{C}$: $i \in \mathbb{C}$ est $x \in \mathbb{R}^n$ mais $i.x \notin \mathbb{R}^n$
3. X_1, X_2 deux espace vect $X_1 \times X_2$ est aussi esp vect

   $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1 , x_2+y_2)$

   $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1 , \alpha x_2)$
4. $X = C([a,b], \mathbb{R})$ est l'espace des fct, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ f est continue, est un esp vect
5. l'espace des polynômes

   $E = \{ \sum_{j=0}^{n} a_i x^j , n = 1.2 \ldots \}$

   est un espace vect
6. les espace des suite :

   soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

   $c_0 = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \}$ est un esp vect

   $\ell^{\infty} = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_n |x_n| < M \}$ est un esp vect

   soit $p \geq 1$ l'espace de suits p bornée (la serie à la puissance P est finie)

   $\ell^p = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty \}$

   soit ℓ^p, $\alpha x = (\alpha x_1 , \alpha x_2 \ldots)$

   $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_n|^p$

$= |\alpha|^p \sum_{n=1}^{n} |x_n|^p$

$x \in \ell^p, y \in \ell^p, x+y \in \ell^p$

$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p$

on n'est besoin à l'ingalité de Minkwski

les ingalité importante de l'espace ℓ^p

I. l'ingalité de Hölder :

soit $p > 1$ et $q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

soit $\xi = (\xi_i)_{i \in N}$ $\psi = (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \psi_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|^q)^{\frac{1}{q}}$

II. pour le cas $p = q = 2$ cette egalité est appelé l'ingalité de couchy schwartz

III l'ingalite de Minkeswski

$(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \psi_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

Def

un sous ensemble non vide $Y \subseteq X$ est dit un sous espace de X $\forall y_1, y_2 \in Y$ et $\alpha, \beta \in K$: $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$

exp

$\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$

$z_1 = i$, $z_2 = i/2$

$|z_1| = 1 \leq 1$, $|z_2| = \frac{1}{2}$

$|z_1 + z_2| = |\frac{3}{2} i| = \frac{3}{2} > 1$

Donc $\overline{D}$ n'est pas un sous-espace vect de $\mathbb{C}$

les espace de Banach

X est espace-vect

1.2.1. normes

une fct $N : X \longrightarrow R^+$

i - $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $\forall x \in X$

ii - $N(\alpha x) = \alpha N(x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii - $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

exp

1. $\|\cdot\|_2 : R^2 \longrightarrow R_+$

$(x, y) \longrightarrow |x| + |y|$

2. $\|\cdot\|_{p\infty} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

3. dans $C([a,b], R)$ on a

$\|f_{L^1}\| = \int_a^b |f(t)| dt$

est une norme

$\|f\|_{L^1} = 0 \Rightarrow \int_a^b |f(t)| dt = 0$

$\Rightarrow |f(t)| = 0$

$\Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$

$\Rightarrow f = 0$

$\|\alpha \cdot f\|_{L^1} = \int_a^b |\alpha f(t)| dt = |\alpha| \int_a^b |f(t)| dt$

$= |\alpha| \|f\|_{L^1}$

$\|f + g\| = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt$

$= \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$

Donc ℓ^p on muni de la norme suivante $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$\|x\|_{\ell^p} = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

preuve

$\|x\|_{\ell^p} = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$

$|x_i|^p = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad x_i = 0$

$$\|\alpha X\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha x_i|^p\right)^{1/p}$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_i|^p\right)^{1/p}$$
$$= |\alpha| \, \|X\|_{\ell^p}$$

pour montrer que $\|x+y\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p} + \|y\|_{\ell^p}$ il suffit d'utiliser l'inégalité de minkouski

1.2.2. quelque topologie des espace vect normé

I les Boules

ouvert : $\mathring{B}(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| < r\}$

fermé : $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : \|x-y\| \leq r\}$

II une partie V de X est un voisinage d'un point x_0 si il existe une $B(x_0, r) \subseteq V$

III A est un ouvert est un voisinage de chaque ses point ($\forall x \in A, B(x,r) \subseteq A$)

IV fermé : B est fermé si son complimentaire est un ouvert

V l'interieur de A est le plus grand ouvert contant Dans A

VI aderence de A est le plus petit fermé contien A

Alors on $A^\circ \subseteq A \subset \overline{A}$

VII $x \in \overline{A}$ Alors $\exists x \in A$:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x$$

si A fermé $A = \overline{A}$

si A ouvert $A = A^\circ$

Def

une suite (x_n) est une suite de couchy si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n, m > N_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

une suite x_n est convergente vers x si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n > N_\varepsilon$ $\|x_n - x\| < \varepsilon$

propriétés :

I tout suit de couchy est Borné

II tout sous suite d'une suite de couchy est couchy

III) si une suite de couchy admet une sous suite qui converge Alors elle converge

Def

un espace vect est complet si tout suite de couchy est convergente

Def

un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet

quelque rappele sur les suite Dans esp vect normé

proposition

une suite x_n est convergente Dans X, $\exists x \in X$; $\lim_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$

en ecrit

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x \text{ ou tout simplement}$$

$x_n \longrightarrow x$

Attention une suite converge si elle conv

Exp $X =]0, 1[$, la suite $x_n = \frac{1}{n}$

ne conv pas dans X car

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X$$

proposition :

1. une suite convergente est bornée et sa limite unique

2. converge $\Rightarrow$ cauchy

preuve soit x_n une suite conv dans X ; $\exists\, x \in X$ soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall n > N_\varepsilon$: $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$

$$\|x_n - x_m\| = |x_n - x_m + x - x|$$
$$\leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| \leq \varepsilon$$

$\boxed{\text{Banach} = \text{E.V.N} + \text{Complet}}$

exp

1. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (tout les espace de dimens finie est Banach)

2. $(\mathbb{Q}, |\ |)$ soit $x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} = e \notin \mathbb{Q}$$

donc elle conv pas dans $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ n'est pas un espace de Banach

3. $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fct continue

$X = \{f ; f = [0,1] \to \mathbb{R} ; \text{continue}\}$

muni de la norme

$\|f\|_\infty = \max_{0<t<1} |f(t)|$ est un espace de Banch

preuve

l'idée est utilise le fait que $f_n(t) \in \mathbb{R}$ qui est complet Donc on peut trouver une limite à cette suite de cauchy a pas on montre que cette..

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy Dans X

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n, m > N$,

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

$$\max_{0<t<1} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

$\forall t \in [0,1]$ $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$

$f_n(t)$ est une suite de cauchy dans $\mathbb{R}$. qui est complet donc $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ $\forall t \in [0,1]$

$\forall t \in [0,1]$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Donc $f_n(t)$ conv uniformement vers $f(t)$

Donc $\max |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon$

ie: $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

f_n conv vers f dans X

comme la conv est uniforme Donc f est continue ; $f \in X$

4. l'espace $C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$ n'est pas complet

preuve : TD

théo

un sous espace vectoriel $Y \subset X$ est complet $\Leftrightarrow$ Y est fermé

preuve

pour montrer le theo précédent il suffit de montre que :

Y fermé $\Leftrightarrow$ Y contien les limites de ces suite de couchy

$\Leftarrow$ supposons que y est fermé ($Y = \overline{Y}$)

Soit x_n une suite de couchy dans y Donc est une suite de couchy dans X qui est complet Donc x_n conv vers x, $x \in \overline{Y} = Y$ puisque Y fermé Donc y est complet

$\Rightarrow$ Supposon que Y est complet soit $x \in \overline{Y}$ Alors $\exists\, x_n \in Y$ $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

$x_n \in Y$ elle converge $\Rightarrow$ couchy comme Y est complet elle conv vers $x' \in Y$, comme la limite d'une suite conv est unique alors $x = x' \in Y$

$x \in \overline{Y} \Rightarrow x \in Y \Rightarrow \overline{Y} = Y$

Y est fermé

1.3. les espace des applicotion linesire

Def

une applecotion (operoteur) linesire est fonction (X, Y deux espace v.)

$$T : X \longrightarrow Y$$

tel que : $\forall\, x, y \in D(T)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i $T(x+y) = T(x) + T(y)$

ii $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$D(T)$ est le Domaine de T

on definit egalement

$\mathrm{Im}(T) = \{ y \in Y \,/\, \exists\, x \in X, T(x) = y \}$

$\mathrm{Ker}(T) = \{ x \in D(T) \,/\, T(x) = 0 \} \neq \emptyset$

exp

① Dans $\mathbb{R}$ les applicotions linesire sont de la forme

$T(x) = a x \quad a \in \mathbb{R}$

② $T : C^1[a, b] \longrightarrow C[a, b]$

$x \longrightarrow x'$

$T(x) = x'$ est linesire en effet

$T(x+y) = (x+y)'$

$= x' + y' = T(x) + T(y)$

$T(\alpha x) = (\alpha x)' = \alpha x'$

$= \alpha T(x)$

1.3.2. operoteur linesire Bornée

Def

Un operoteur $T : D(T) \longrightarrow (Y, \| \ \|)$ est Bornée s'il existe $C > 0$:

$\| T(x) \| \leq C \| x \| \ \forall\, x \in D(T)$

$\Leftrightarrow$

$\dfrac{\| T(x) \|}{\| x \|} \leq C$; $x \neq 0$

le plus petit des majorant est appelé la norme du T noté

$\| T \| = \sup \dfrac{\| T(x) \|}{\| x \|}$

Donc T est Bornée si

$\| T(x) \| \leq \| T \| \, \| x \|$

lemme :

pour tout operoteur linesire Bornée on a :

$\| T \| = \sup\limits_{\| x \| = 1} \| T(x) \| \quad$ (I)

preuv

$y = \dfrac{x}{\| x \|}$ Alors $\| y \| = 1$

$\dfrac{\| T(x) \|}{\| x \|} = \| T(y) \|$ passant au sup on trouve I

Exp

soit X l'espace des polynomes sur $[0,1]$, muni de la norme

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

soit l'operateur

$$T : X \longrightarrow X$$
$$x \longrightarrow x'$$

n'est pas Borné

il suffit de trouvé une suite $x_n(t) \in X$

$x_n = t^n$; $\|x_n\| = 1$

$T(x_n) = T(t^n) = n t^{n-1}$

$\|T(x_n)\| = n$; $\lim_{n \to \infty} \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} = \infty$

T n'est pas Bornée

Def

$T : D(T) \longrightarrow Y$ est continue en poit x_0 :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $\|x - x_0\| < \delta$

$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$

elle est continue sur $D(T)$ si elle est continue $\forall x_0 \in D(T)$

Thé

Soit $T : D(T) \longrightarrow Y$ une appli linaeire

i : T continue $\Leftrightarrow$ T Bornée

T est continue en un point x_0 alors elle continue sur tous $D(T)$

preuve

$\Leftarrow$ suppsost que T est Bornée

$\|T(x)\| < \|T\| \cdot \|x\|$

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists ?$ $\delta > 0$,

$\|x - x_0\| \leq \cdot \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$

$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T\|\|\ \ x_0)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$

$\Rightarrow T$ est continue

$\Leftarrow$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\|x - x_0\| < \delta$

$\Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$

Soit $y = \frac{x - x_0}{\delta}$, $\|y\| \leq 1$

$\|T(y)\| = \frac{1}{\delta} \|T(x) - T(x_0)\|$

$\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \|y\|$

T Bornée

L'espace des operateurs lineaire Bornée :

Considere X, Y deux espace normé

Def on note $B(X,Y)$ l'ensemble de tout les operateurs lineaire et Bornée de X dans Y.

$B(X,Y) = \{ T : X \longrightarrow Y / T \text{ lineaire + Bornée} \}$

muni de la norme

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| = 1} \|T(x)\|$$

c'est claire que c'est une espace vect

(1) $(T_1 + T_2)(x+y) = T_1(x+y) + T_2(x+y)$

$= (T_1 + T_2)(x) + (T_1 + T_2)(y)$

(2) $\alpha T(x+y) = \alpha T(x+y) = \alpha T(x) + \alpha T(y)$

$B(x,y)$ esp vect

$\|T(x)\| \leq C \|x\|$

$\Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$

$\|(T_1 + T_2)(x)\| \leq \|T_1(x)\| + \|T_2(x)\|$

$\leq \|T_1\| \|x\| + \|T_2\| \|x\|$

De même $\|(\alpha T)(x)\|$