thé

$T_n : X \longrightarrow Y$

Si Y est un espace de Banach alors $B(X,Y)$ est un Banach

etape de preuve :

1. cauchy
2. $T_n \in B(X,Y) \Rightarrow T_n$
3. $T \in B(X,Y)$
4. $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$

Soit T_n une suite de cauchy dans $B(X,Y)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N$:

$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$

$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|(T_n - T_m)\| \|x\|$
$< \varepsilon$

$(T_n(x))_n$ est cauchy dans y qui est Banach dans elle conv vers $T(x) \in Y$

on définit l'operateur $T : X \longrightarrow Y$

$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$

montrons $T \in B(X,Y)$

1. lineaire

$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y)$
$= \lim_{n\to\infty} (T_n(x) + T_n(y))$
$= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y)$
$= T_n(x) + T_n(y)$

De même $T(\alpha(x)) = \alpha\, T(x)$

2. Bornitude

$\|T_n(x) - T(x)\| = \|T_n(x) - \lim_{n\to\infty} T_n(x)\|$

$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \lim \|T_n - T_m\| \|x\|$
$< \varepsilon$

$T_n - T \in B(X,Y)$

$T = T_n - (T_n - T)$

$T \in B(X,Y)$

$\|T_n - T\| < \varepsilon$

Donc $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ Dans $B(X,Y)$

Donc $B(X,Y)$ est Banach

Chapitre 02

Dual d'un operateur

2.1.

forme lineaire Bornée

une forme lineaire sur une espace vectoriel normé $(X, \|.\|)$ est une application lineaire

$f : X \longrightarrow$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Def

un forme lineaire est Borée s'il existe $C > 0$

$|f(x)| < C\|x\|$

$x \neq 0$ $\frac{|f(x)|}{\|x\|} < C$;

$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$

Def

on appelle dual de X, noté X' l'ensemble de tout les forme lineaire Bornée de X

$X' = \{ f : X \longrightarrow K \ / \ f$ lineaire, Bornée

est un espace vect normé de la norme

$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$

exp

Soit $X = C[a,b]$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|$ et soit

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$; Donnes par

$f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$

1. montre que $f \in X' = B(X, \mathbb{R})$
2. calculer $\|f\|$

1. $f(x+y) = \int_a^b (x+y)(t)\,dt$

$= \int_a^b x(t) + \int_a^b y(t)\,dt$

$= f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = \int_a^b (\alpha x)(t)\,dt$

$= \alpha \int_a^b x(t)\,dt = \alpha\, f(x)$

2. pour montre que f est Bornée on montre $|f(x)| < C\,\|x\|_{\infty}$

$|f(x)| = |\int_a^b x(t)\,dt|$

$\leq \int_a^b |x(t)|\,dt$

$\leq \int_a max\ |x(t)|\,dt$

$= \|x\|_{\infty}\,(b-a) = C\ \|x\|_{\infty}$

Donc $f \in X'$

2 calcule $\|f\|$

$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$

on a

$|f(x)| \leq (b-a)\,\|x\|$

$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq (b-a)$

$\|f\| \leq (b-a)$

on voule trouve $x_0(t) \in X$

$f(x_0) = \int_a^b x_0(t) = b-a$ et $\|x\|=1$

on prend $x_0(t) = 1\quad \forall t \in [a.b]$

$\|x_0\|_{\infty} = \max_{a<t<b} |x_0(t)| = 1$

et

$|f(x_0)| = |\int_a^b dt = b-a$

$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|_{\infty}} = \frac{b-a}{1} = b-a \leq \|f\|$

De 1 et ②, $\|f\| = b-a$

Exp

Soit $L^2([a,b])$

$X = L^2([a,b]) = \{x\ [a,b] \to \mathbb{R}\ |\ \int_a^b |x\,t|^2\,dt < \infty\}$

muni de la norme

$\|x\|_2 = (\int_a^b |x(t)|^2)^{\frac{1}{2}}$

soit $g \in L^2([a,b])$ on definit

$f : L^2([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$f(x) = \int_a^b x(t)\,g(t)\,dt$

2. la Bornitude

$|f(x)| = |\int_a^b x(t)\,g(t)|$

$\leq \int_a^b |x(t).\,g(t)|\,dt$

$\leq (\int_a^b |x(t)|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |g(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \|X\|_2.\,\|g\|_2$

Donc f est Bornee $\Rightarrow f \in X'$

$\|f\| \leq \|g\|_2$ .... (1)

Soit $x_0 = g$, $\|x_0\| = \|g\|$

$|f(x_0)| = \int_a^b |g^2| \Rightarrow \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|}$

$= \frac{\int_a^b |g^2|\,dt}{(\int_a^b |g|^2)^{\frac{1}{2}}}$

$= \|g\|_2$

$\|f\| \geq \frac{|f x_0|}{\|x_0\|} = \|g\|$ ...(2)

de (1) et (2) $\|f\| = \|g\|$

les espace de dimension finie

theo

Dans les espace de dim finie tout application lineaire est Bornee

Preuve

Soit $T : X \longrightarrow X$

X est une esp vect de dim $< \infty$

muni de la Base $\{e_1 \dots e_n\}$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\|T(x)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i)\|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|T(e_i)\|$$
$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|T(e_i)\| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\leq C \max_{1 \leq i \leq n} \|T(e_i)\| \, \|x\|$$

Dual de $\mathbb{R}^n$ $[(\mathbb{R}^n)']$

Soit $f \in (\mathbb{R}^n)' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

muni de la norme euclidienne

soit $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$

f est complement definit par $f(e_i)$

et l'image d'une Base par une application lineaire est une base donc :

$\dim (\mathbb{R}^n)' = n$ notant $f(e_i) = \gamma_i$

$$|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} |x_i \gamma_i|$$
$$\leq \left(\sum |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |\gamma_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|\gamma\|_2 \, \|x\|_2$$

pour montre l'egalité il suffit de proposé $x_0 = \gamma$ donc

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \|\gamma\|$$

$$\|f\| = \|\gamma\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme euclidienne

Donc $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$

Theo de Hahn Banach

X esp vect

Def

Soit $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit sous forme lineaire si :

i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (sous additivie)

ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\alpha > 0$ (positivement Homogene)

theo Hahn Banach

Soit X esp vect, $Y \subseteq X$ sous esp de X

et $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ forme lineaire sur Y

teq $f(y) \leq p(y)$ $\forall y \in Y$

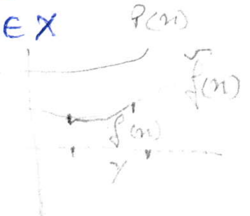
(p forme sous lineaire)

Alors $\exists \hat{f}$ $X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\hat{f}$ est une forme lineaire

$\hat{f}|_Y = f$ ($\hat{f}(y) = f(y)$; $\forall y \in Y$)

$\hat{f}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in X$



Application

1- generalisation HB

Soit X espace vect et $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$

sous additive et

$p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Soit $Y \subseteq X$ sous esp de X, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$

une forme lineaire

$$|f(y)| \leq p(y), \forall y \in Y$$

Alors $\exists \hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ forme lineaire extension de f et $|\hat{f}(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in X$

Preuv TD

2- Hahn Banach dans e.v.n

Soit X esp vect normé et soit f une forme lineaire Bornee sur Y ($Y \subseteq X$) sous esp. vect normé de X

Alors : $\exists \hat{f}$ lineaire Bornée extension de f et $\|\hat{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}$

preuve

comme f est Bornée sur Y ($f \in Y'$)

$$|f(y)| \leq \|f\|_{Y'} \, \|y\|_Y \quad \forall y \in Y$$

Soit $p(x) = \|f\| \|x\|$; $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$p(x+y) = \|f\| \|x+y\|$

$\leq \|f\| (\|x\| + \|y\|)$

$= \|f\| \|x\| + \|f\| \|y\|$

$= p(x) + p(y)$ ---- (1)

$p(\alpha) = \|f\| (|\alpha| \|x\|)$

$= |\alpha| \|f\| \|x\|$

$= \alpha\, p(x)$ ---------- (2)

Alors

d'après le theo H B G, il existe

$\hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ forme lineaire extension de f et $|\hat{f}(x)| \leq p(x) = \|f\| \|x\|$

$\forall x \in X$

Donc elle est Bornée

$\|\hat{f}\|_{X'} \leq \|f\|_{Y'}$ --- (1)

comme $Y \subseteq X$ alors

$\|\hat{f}\| = \sup_x \frac{\hat{f}(x)}{\|x\|} \geq \sup_x \frac{|\hat{f}(x)|}{\|x\|}$

$= \sup_{x \in Y} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

$= \|f\|$ -- (2)

de (1) (2) : $\|\hat{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'}$

3- Application

extension d'une forme lineaire Bornée par un point x_0

soit X e.v.n $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$

Alors $\exists\, \hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ forme lin Bornée : $\|\hat{f}\| = 1$ et $\hat{f}(x_0) = \|x_0\|$

preuve

Soit $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$

soit $Y = \{ y \,/\, y = \alpha x_0 \} = \langle x_0 \rangle$

est sous espace de X

Soit $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(y) = \alpha \|x_0\|$

i - elle lineaire

Bornée $|f(y)| = |\alpha \|x\||$

$= 1 \|y\| |$

$= \|y\|$

Donc f est Bornée $\|f\|_Y = 1$

Alors $\exists\, \hat{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ extension de f lineaire et Bornée

$\|\hat{f}\|_{X'} = \|f\|_{Y'} = 1$ et

$\hat{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$

4- Application

soit $x \in X$, $x \neq 0$

i - $\|x\| = \sup_{f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$

ii - et Donc si $x \in X$: $f(x) = 0, \forall f \in X'$

$\Rightarrow x = 0$

Preuve TD

2.3 - Dual d'un operateur

soit $T \in B(X,Y)$; $T : X \longrightarrow Y$

operateur lineaire Bornée

Soit $g \in Y'$ on peut definie une fct f : $f(x) = g(T(x))$

1/ f est lineaire comme composée de deux fct lineaire

2/ f est Bornée car :

$|f(x)| = |g(T(x))|$

$\leq \|g\| . \|T(x)\|$

$= \|g\| \|T\| \|x\|$

$\Rightarrow \|f(x)\| \leq \|g\| \|T\|$

Donc on peut difinie un operateur appellée duale de T noté T^*

$T^* : Y' \longrightarrow X'$

$g \longrightarrow f = g \circ T$

$T^*(g)(x) = g(T(x))$