Def

Soit $T \in B(x,y)$ le dual de T est l'operateur :

$$T^* : Y' \longrightarrow X'$$

$$T^*(g)(x) = g(T(x))$$

theo

l'operateur T^* est lineaire + Bornée et $\|T^*\| = \|T\|$

ie : $T^* \in B(Y', X')$ et $\|T^*\| = \|T\|$

Preuve TD

proposition

I Soit T, S deux operateur $T, S \in B(X,Y)$

(i) $(T+S)^* = T^* + S^*$

(ii) $(\alpha T)^* = \alpha T^*$

II Soit $T \in B(X,Y)$ et $S \in B(Y,Z)$

Donc

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S$$

III $T \in B(X,Y)$ et $T^{-1}(Y,X)$ existe

Alors $(T^*)^{-1}$ existe aussi

+ $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

IV $(T^n)^* = (T^*)^n$

Chapitre 03

les grand theorème de Banach

theo Banach Steinhouse

Soit X esp Banach, Y esp vect bornée et soit $(T_n)_n$ une suite des operateurs lineaire et Bornée

$T_n \in B(X,Y)$; si $x \in X$, $\exists C_x > 0$

$$\|T_n x\| < C_x$$

Alors : $\exists C >$; $\|T_n\| \leq C$

le contraire est vrai

si $\|T_n\| < C$

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \, \|x\|$$
$$\leq C \, \|x\| = C_x$$

Ce theo s'ecrit aussi :

$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{ \|T_n x\| ; x \in X \} < +\infty$

$\Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{ \|T_n\| \} < +\infty$

proposition

Soit $T_n \in B(X,Y)$ Alors :

l'operateur $T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$ est lineaire Bornée ie : $T \in B(X,Y)$

Preuve

$$T : X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow T(x) = \lim_{n \to +\infty} T_n(x)$$

1. linearity : $T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \to +\infty} T_n(\alpha x + \beta y)$

$= \lim_{n \to +\infty} [\alpha T_n(x) + \beta T_n(y)]$

$= \alpha T(x) + \beta T(y)$

2. Bornitude

$\|T(x)\| = \|\lim_{n \to \infty} T_n(x)\|$

$= \lim_{n \to \infty} \|T_n(x)\|$

$\leq C\|x\|$

Don T est Bornée

II theo d'application ouvert

Def soit X.Y e.v.n et

$f : X \longrightarrow Y$ est dit une application ouvert si l'image direct d'une ouvert $A \subseteq X$ est un ouvert $f(A) \subseteq Y$

exemple

1. si f est bijective et continu alors l'application f^{-1} est ouvert
2. $f(x) = x^3$, $f(]a,b[) =]a^3, b^3[$ est une application ouvert
3. $f(x) = x^2$
   $\exists \;]-1,1[$, $f(]-1,1[) = [0,1[$ n'est pas ouvert

II theo application ouvert

Soit X. Y deux espace de Banach $T \in B(X,Y)$; T surjective $\Leftrightarrow$ T ouvert

T bijective $\Leftrightarrow$ T^{-1} est continue (Bornée)

.(Si T est bijective l'inverse n'est pas toujour Bornée ie: la contradiction X et Y Banach est necessaire)

Rappele

pour montrer que une app est bijective on montre que elle injective + surjective

injective ssi: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

f lin $\Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

$f(y) = 0 \Rightarrow y = 0$

surjective:

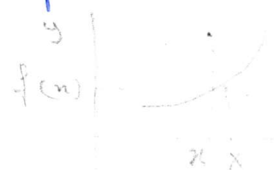
$\forall y \in Y \; \exists x \in X :$
$y = f(x)$

III theo de graph fermé

Def

Soit X.Y deux e.v.n Soit
$T : D(T) \longrightarrow Y$
un operateur lineaire
T est dit ferme si son graphe
$G_T = \{(x.y) \quad y = T(x)\}$
est fermé

. l'objective de cette section est trouvie le lien (condition) entre operateur fermé et Bornée



Rappelle

\# un ensemble A est ferme si $A = \bar{A}$
ie
A continue tout les suite de ses $x_n \in A$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x \Rightarrow x \in A$

\# operateur ferme T si son graphe est ferme
$G_T = \{(x,y) / x \in D(T), y = T(x)\} \subseteq X \times Y$

\# X est Y e.V norme Alors muni
$\|(x.y)\| = \|x\| + \|y\|$

4- (théo graphe fermé)

X, Y deux Banach et T un opérateur linéaire

$T : D(T) \longrightarrow Y$, fermé

si $D(T)$ est fermé Alors T Bornée

Preuv

pour montre ce théorème on ce Base sur le théo d'application ouvert

Soit $P : G(T) \longrightarrow D(T)$

$(x, Tx) \longrightarrow x$

1. $P(\alpha x_1 + \beta x_2), T(\alpha x_1 + \beta x_2)$

$= \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha P(x_1, Tx_1) + \beta P(x_2, Tx_2)$

$\| P(x, Tx) \| = \| x \| \leq \| x \| + \| Tx \|$

$= \| x, T(x) \|$

Donc P Bornée

P est bejective par définition

(1) $D(T) \subset X$ comme $D(T)$ est fermé et X est un Banach donc $D(T)$ est Banch

(2) $G(T) \subseteq X \times Y$

$G(T)$ est fermé puisque T est fermé Alors

$G(T)$ Banach $\rightarrow$ Don

$\rightarrow$ Donc d'aprés T A O P^{-1} est Bornée

$P^{-1} \; D(T) \longrightarrow G(T)$

$x \longrightarrow (x, Tx)$

est Bornée

$\| Tx \| \leq \| P^{-1}(x) \| = \| x \| + \| Tx \|$

$\leq c \| x \|$

Donc T Bornée

Proposition

T est fermé si $x_n \in D(T)$

$x_n \longrightarrow x$ et $Tx_n \longrightarrow y$

$\Rightarrow x \in D(T)$ et $y = Tx$