Analyse fonctionnelle – TD 5

Exercice 1

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés.

1. Soit $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire.
   (a) Donner un exemple d'un opérateur linéaire qui est borné mais non fermé .
   (b) Donner un exemple d'un opérateur linéaire qui est fermé mais non borné.

2. Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire fermé et bijectif. Montrer que son inverse

$$T^{-1} : Y \to X$$

   est un opérateur linéaire fermé.

3. Soit $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire fermé. Soient (x_n) et $(\tilde{x}_n)$ deux suites de $\mathcal{D}(T)$ telles que

$$x_n \to x, \qquad \tilde{x}_n \to x, \qquad T(x_n) \to y, \qquad T(\tilde{x}_n) \to \tilde{y}.$$

   Montrer que $y = \tilde{y}$. On dira alors que la limite de $T(x_n)$ ne dépend pas de la suite approchante.

Exercice 2

Soit $T : \mathcal{D}(T) \subset C([0,1]) \to C([0,1])$ défini par

$$T(f) = f', \qquad \mathcal{D}(T) = C^1([0,1]).$$

1. Montrer que T est un opérateur linéaire.
2. Montrer que T est un opérateur fermé.
3. Dire si T est borné. Justifier la réponse.