

التوزيعات المستمرة 2:

(1) توزيع كاي تربيع: $\chi^2(v)$ Chi-square

(1-4) متغيرة كاي تربيع:

توزيع كاي تربيع χ^2_v بدرجة حرية $v = m$ ، هو توزيع إحصائي لمجموع m متغيرات طبيعية معيارية Z_i ، كل منها مرفوع للقوة 2 :

إذا كانت : $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$

متغيرات عشوائية مستقلة لها توزيع طبيعي معياري :

$$Z_i \sim N(0, 1) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

فإن المتغيرة العشوائية :

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_m^2$$

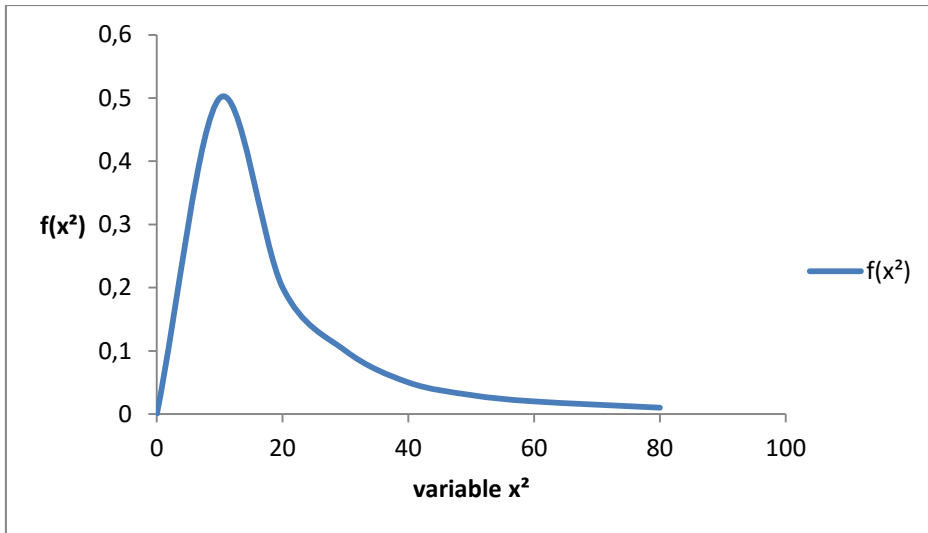
هي متغيرة كاي تربيع χ^2_v ، بدرجة حرية $v = m$ عدد المتغيرات المستقلة المكونة لها ،

متغيرة كاي تربيع هي متغيرة مستمرة تأخذ قيم حقيقية غير سالبة: $\chi^2 \geq 0$.

ونكتب: $\chi^2 \sim \chi^2(v)$

(2-4) التمثيل البياني:

المنحنى الممثل لمتغيرة χ^2 غير متناظر، موجب الالتواء ديله الأيمن أطول (المتوسط أكبر من الوسيط، أكبر من المنوال) .



- المنحنى يمثل دالة الكثافة الإحتمالية : $f(\chi^2)$
- المساحة تحت المنحنى تمثل دالة التوزيع : $F(\chi^2) = \int_0^{(\chi^2)} f(\chi^2) \cdot d(\chi^2)$
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي 1 .
- كل إحتمال هو مساحة جزئية تحت المنحنى .
- درجات الحرية v تحدد الإلتواء و التقرب :
- إذا كانت v صغيرة المنحنى ملتوي، وأقل تقرباً (مدبب) .
- عندما تزداد v المنحنى ينتقل نحو اليمين ويصبح أقل إلتواءاً ، وأكثر تقرباً .
- كلما زادت v كلما إقترب من المنحني الطبيعي .

3-4) العزوم:

القيمة المتوقعة:

$$\mu = v$$

التباين:

$$\sigma^2 = 2 \cdot v$$

4-4) تجميع توزيع كاي تربيع:

لتكن y_1, y_2 متغيرتين مستقلتين، لهما توزيع كاي تربيع :

$$y_1 \sim \chi_{v1}^2$$

$$y_2 \sim \chi_{v2}^2$$

$$\chi^2 = y_1 + y_2 \quad \text{المتغيرة :}$$

هي متغيرة كاي تربيع بدرجة حرية : $v_1 + v_2$

$$\chi^2 \sim \chi_{v1+v2}^2$$

$$\chi'^2 = y_1 - y_2 \quad \text{الفرق أيضا :}$$

$$\chi'^2 \sim \chi_{v1-v2}^2$$

مثال 1:

$$y_1 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 \quad \text{المتغيرة :}$$

$$y_2 = Z_5^2 + Z_6^2 \quad \text{و المتغيرة :}$$

$$y_1 + y_2 \quad \text{متغيرة المجموع:}$$

$$(y_1 + y_2) \sim \chi_6^2$$

متغيرة الفرق: $y_1 - y_2$

$$(y_1 - y_2) \sim \chi^2_2$$

5-4) استخدام الجدول:

نستعمل جدول يعطي احتمالات تراكمية من الشكل : $pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha}) = F(\chi^2_{v,\alpha})$ أي دالة التوزيع أو الإحتمال التجميعي .

يستخدم الرمز $\chi^2_{v,\alpha}$ للتعبير عن قيمة خاصة لمتغيرة كاي تربيع بدرجة حرية v ،

بحيث أن الإحتمال : $pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha}) = \alpha$

خواص:

$$1^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha}) + pr(\chi^2 > \chi^2_{v,\alpha}) = 1$$

إذا كان: $\chi^2_{v,\alpha_1} \leq \chi^2_{v,\alpha_2}$ ، فإن:

$$2^\circ) pr(\chi^2_{v,\alpha_1} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha_2}) = pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha_2}) - pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha_1}) = \\ = F(\chi^2_{v,\alpha_2}) - F(\chi^2_{v,\alpha_1})$$

إذا كانت: $\chi^2_{v,\alpha}$ ، القيمة المقابلة (وغير المناظرة): $\chi^2_{v,1-\alpha}$ ،

وتكون:

$$3^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha}) = pr(\chi^2 > \chi^2_{v,1-\alpha}) = 1 - pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,1-\alpha}) = \\ = 1 - F(\chi^2_{v,1-\alpha})$$

$$4^\circ) pr(\chi^2 < \chi^2_{v,\alpha}) = pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\alpha}) = F(\chi^2_{v,\alpha})$$

إذا كانت: $pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

فإن القيمة المقابلة (وغير مناظرة) : $pr(\chi^2 > \chi^2_{v,1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$

و تكون:

$$5^\circ) pr(\chi^2 > \chi^2_{v,\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$6^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$7^\circ) pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\frac{\alpha}{2}}) + pr(\chi^2 > \chi^2_{v,1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

$$8^\circ) pr(\chi^2_{v,\frac{\alpha}{2}} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{v,1-\frac{\alpha}{2}}) = pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,1-\frac{\alpha}{2}}) - pr(\chi^2 \leq \chi^2_{v,\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

مثال 2:

بدرجة حرية $v=20$ ، القيمة: $\chi^2_{20,0.95} = 31.41$

الإحتمال: $pr(\chi^2 \leq 31.41) = 0.95$

بدرجة حرية $v=24$ ، القيمة: $\chi^2_{24,0.025} = 12.40$

الإحتمال: $pr(\chi^2 \leq 12.40) = 0.025$

القيمة المقابلة: $\chi^2_{24,0.975} = 39.36$

الإحتمال: $pr(\chi^2 > 39.36) = 0.025$

$pr(\chi^2 \leq 39.36) = 0.975$

4-6) تقريب توزيع كاي تربيع من الطبيعي:

يمكن تقريب توزيع كاي تربيع من التوزيع الطبيعي إذا تحقق الشرط : $v \geq 30$
المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = v \\ \sigma^2 = 2v \end{cases}$$

مثال 3:

بدرجة حرية: $v = 50$

القيمة: $\chi^2_{50,0.90} = 63.17$

الإحتمال: $pr(\chi^2 \leq 63.17) = 0.90$

شرط التقريب محقق: $v \geq 30$

المتوسط و التباين:

$$\begin{cases} \mu = v = 50 \\ \sigma^2 = 2v = 100 \end{cases}$$

الإحتمال:

$$pr(\chi^2 \leq 63.17) = pr\left(\frac{\chi^2 - \mu}{\sigma} \leq \frac{63.17 - 50}{10}\right) = pr(Z \leq 1.317) = 0.9049$$