

الاسم واللقب:

الفوج:

امتحان الأعمال الموجهة في مقياس تحليل البيانات

تمرين: لدينا 3 متغيرات X ، Y و Z المتمثلة على التوالي في الانفاق الحكومي، الناتج المحلي الإجمالي والصادرات، تعطى التباينات والتباينات المشتركة بين المتغيرات كما يلي:

$$V(X) = 4, \quad V(Y) = 2, \quad V(Z) = 4, \quad COV(X, Y) = 1, \quad COV(X, Z) = 0, \quad COV(Y, Z) = 1$$

1. انطلاقا من المعطيات المقدمة شكل مصفوفة التباينات والتباينات المشتركة.

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. أوجد القيم الذاتية، ثم رتبها في جدول مع حساب النسب والنسب التراكمية.

$$P_V(\lambda) = \det(V - \lambda I) = 0$$

$$P_V(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)[(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 1] - (4 - \lambda) = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4 - \lambda)[(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 2] = 0$$

$$P_V(\lambda) = (4 - \lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 6] = 0$$

$$4 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 36 - 24 = 12$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$\lambda = 4.73 \quad \lambda = 1.27$$

	F_1	F_2	F_3	المجموع
القيم الذاتية	4.73	4	1.27	10
النسب	$\frac{4.73}{10} = 0.473$	$\frac{4}{10} = 0.4$	$\frac{1.27}{10} = 0.127$	1
النسب التراكمية	0.473	0.873	1	-

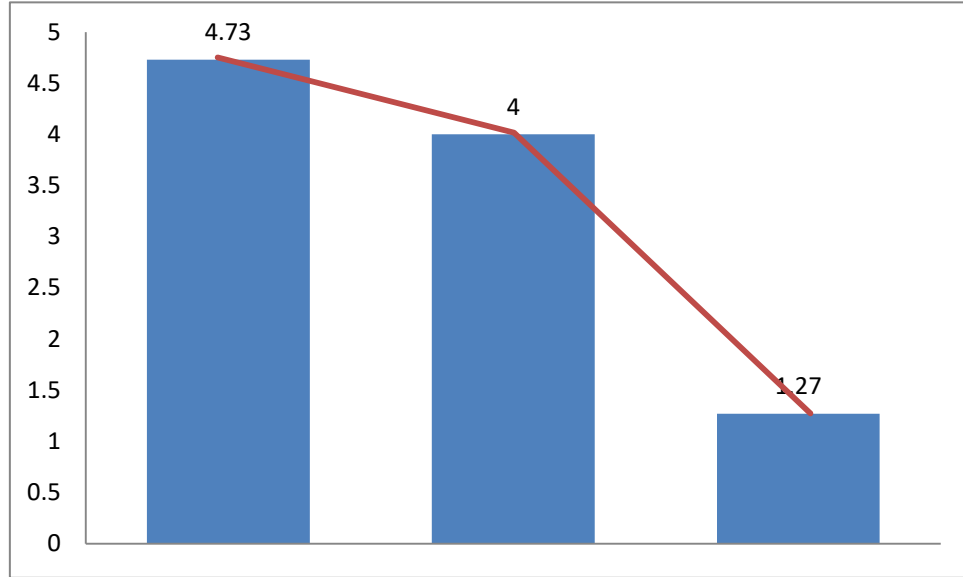
3. ما هي نسبة التباين الذي يفسره كل محور؟

• المحور الأول 1 : 47.3%

• المحور الثاني 2 : 40%

• المحور الثالث 3 : 12.7%

4. مثل القيم الذاتية بيانات Scree plot.



5. بالاعتماد على معيار كايزر، كم هو عدد المركبات الرئيسية؟

• حسب معيار كايزر لمتوسط القيم الذاتية: $\bar{\lambda} = \frac{\sum \lambda}{3} = \frac{10}{3} = 3.33$

وعليه فإن عدد المركبات الرئيسية هو 2 (لأن القيمة الذاتية الأولى والثانية أكبر من متوسط القيم الذاتية)

6. أوجد الشعاع الذاتي الموحد الثاني

$$(V - \lambda_2 I)u_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4-4 & 1 & 0 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 0 & 1 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \rightarrow x + z = 0 \rightarrow x = -z$$

• الشعاع الذاتي الثاني: $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

• طول الشعاع: $\|u_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

• الشعاع الذاتي الموحد: $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.71 \\ 0 \\ 0.71 \end{pmatrix}$