

3^{ème} année Informatique 2025/2026
Corrigé type de l'interrogation.

Exercice 1 (5pts)

1] A et B sont indépendants alors A et $\bar{B}$ sont indépendants aussi?

A et B indépendants $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

On a $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$

$\Rightarrow P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$

$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

car $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$= P(A) - P(A)P(B)$

$= P(A)(1 - P(B))$

$= P(A)P(\bar{B})$

d'où A et $\bar{B}$ sont indépendants

2] On considère que A et B sont indépendants

avec : $P(A) = \frac{1}{4}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$

a). La probabilité que les deux événements aient lieu :

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

b). Au moins un des événements ait lieu :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12}$

1



$P(A \cup B) = \frac{6}{12}$

c/. Exactlyement un des deux événements ait lieu :

$$\begin{aligned}
 P[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})] &= P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A}) \\
 &= P(A) P(\bar{B}) + P(B) P(\bar{A}) \\
 &= P(A) (1 - P(B)) + P(B) (1 - P(A)) \\
 &= \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3} (1 - \frac{1}{4}) = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$P((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = \frac{5}{12}$$

Exercice 2 (3pts)

considérons les événements suivants :

C : " L'étudiant connaît le programme "

A : " la réponse est exacte "

$$\text{on a : } \begin{cases} P(C) = \frac{1}{2} \\ P(A|C) = 1 \\ P(A|\bar{C}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On veut calculer la probabilité que la réponse est exacte à cause des connaissances de l'étudiant c.a.d $P(C|A)$.

En utilisant le théorème de Bayes, on a :

$$P(C|A) = \frac{P(A|C) \cdot P(C)}{P(A|C) \cdot P(C) + P(A|\bar{C}) \cdot P(\bar{C})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

①

Exercice 3. (6pts)

X une v. a. continue de densité de prob.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1/ La fonction de répartition:

On a par définition: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \text{O.F.}$$

• si $x \leq -1$: $f(x) = 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$ O.F.

• si $x \in [-1, 0]$: $-1 \leq x \leq 0$, $|x| = -x$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{O.F.} &= \int_{-1}^x (1+t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^x = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) - \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} (1+x)^2 \end{aligned}$$

• si $x \in [0, 1]$: $0 \leq x \leq 1$, $|x| = +x$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^x (1-t) dt$$

$$\text{O.F.} = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$$

• si $x > 1$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$$

$$F_X(x) = \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^1 (1-t) dt$$

$$\text{or } = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ainsi :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2/ L'espérance mathématique:

On a : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

$$\text{or } = \int_{-1}^1 x (1 - |x|) dx = 0$$

car la fonction $x \mapsto x f(x)$ est impaire sur $[-1, 1]$.

• La variance:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 (1 - |x|) dx = 2 \int_0^1 x^2 (1 - x) dx$$

$$= 2 \left[\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx \right] = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}$$

3/ $P(|X| > \frac{1}{2}) = 1 - P(|X| \leq \frac{1}{2}) = 1 - [F_X(\frac{1}{2}) - F_X(-\frac{1}{2})]$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \right)_{x=\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} \right)_{x=-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{8} \right) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

• $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}) = F_X(\frac{1}{4}) - F_X(-\frac{1}{2})$