MESI - Examen Final (Corrigé Type)

(Durée: 02 heures - Documents et appareils électroniques non autorisés)

Exercice 1 (7 pts)

Partie I

1. Définition du nombre pseudo-aléatoire

Un nombre pseudo-aléatoire est un nombre généré par des PRNG; des algorithmes déterministes qui imitent le comportement aléatoire. ***(1 pts)***

2. Période de générateur

Pour un LCG avec les paramètres :

$X_0 = 1, a = 6,\ m = 13$ La congruence linéaire est de forme : $X_{i+1} = 6X_i\ \boldsymbol{mod}\ 13$

Ce LCG aura une période complète $P = m - 1 = 13 - 1 = 12$ ***(1 pts)***

Justification :

1) $m = 13$ est premier ***(0.5 pts)***

2) $m - 1 = 12$, $a = 6$. Vérifions pour chaque k de 1 à 12 : ***(1.5 pts)***

$k = 1 : 6^1 - 1\ mod\ 13 \neq 0$	$k = 7 : 6^7 - 1\ mod\ 13 \neq 0$
$k = 2 : 6^2 - 1\ mod\ 13 \neq 0$	$k = 8 : 6^8 - 1\ mod\ 13 \neq 0$
$k = 3 : 6^3 - 1\ mod\ 13 \neq 0$	$k = 9 : 6^9 - 1\ mod\ 13 \neq 0$
$k = 4 : 6^4 - 1\ mod\ 13 \neq 0$	$k = 10 : 6^{10} - 1\ mod\ 13 \neq 0$
$k = 5 : 6^5 - 1\ mod\ 13 \neq 0$	$k = 11 : 6^{11} - 1\ mod\ 13 \neq 0$
$k = 6 : 6^6 - 1\ mod\ 13 \neq 0$	$k = 12 : 6^{12} - 1\ mod\ 13 = 0$

Remarquons que : $m - 1 = 12$ est bien le plus petit k qui satisfait la condition :

$$(a^k - 1)\ \boldsymbol{mod}\ m = 0$$

Partie II

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2) \qquad g(x) = 1 \qquad x \in [0, 1]$$

1. La constante optimale *M*

$f(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 \implies f'(x) = -3x$

$f'(x) = 0 \iff -3x = 0 \implies x = 0$

$f(0) = \frac{3}{2} * (1 - 0^2) = \frac{3}{2}$ $\qquad , f(1) = 0$

Donc,

$$M = \max_x \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = max(\frac{3}{2}, 0) = \mathbf{\frac{3}{2}} \quad \textit{(1 pts)}$$

2. La probabilité d'acceptation théorique

$$P_{acceptation} = \frac{1}{M} = \mathbf{\frac{2}{3}} = \mathbf{0.667 = 66.7\%} \quad \textit{(1 pts)}$$

3. Acceptation/Rejet ***(1 pts)***

y_i	u_i	$r = \frac{f(y_i)}{M * g(y_i)}$	$u_i \leq r?$
0.15	**0.3**	$\frac{3/2 * (1 - 0.15^2)}{2/3} = 0.98$	**Accepté**
0.42	**0.6**	$\frac{3/2 * (1 - 0.42^2)}{2/3} = 0.82$	**Accepté**
0.87	**0.1**	$\frac{3/2 * (1 - 0.87^2)}{2/3} = 0.24$	**Accepté**

Exercice 2 (6 pts)

1. La probabilité qu'aucune requête n'arrive pendant un intervalle de 10 minutes

$$t = 10\ min = 10/60 = 1/6\ h$$

$$P(k = 0) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{(\lambda t)^0 e^{-(12/6)}}{0!} = \mathbf{0.1353 = 13.53\%} \quad \textit{(1 pts)}$$

2. La probabilité qu'au moins 2 requêtes arrivent pendant un intervalle de 5 minutes

$t = 5\ min = 5/60 = 1/12\ h$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$

$P(k = 0) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{(1)^0 e^{-1}}{0!} = 0.368$

$P(k = 1) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{(1)^1 e^{-1}}{1!} = 0.368$

$P(X \geq 2) = 1 - 0.368 + 0.368 = \mathbf{0.264 = 26.4\%}$ $\qquad$ ***(1.5 pts)***

3. La probabilité que le temps d'attente avant la prochaine requête soit supérieur à 8 minutes

$P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$

$t = 8\ m = 8/60 = 2/15\ h$

$P(T > \frac{2}{15}) = e^{-(24/15)} = \mathbf{0.2019 = 20.19\%}$ $\qquad$ ***(1 pts)***

4. La probabilité que le temps d'attente soit compris entre 2 et 6 minutes

$P(t_1 \leq T \leq t_2) = F(t_2) - F(t_1) = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}$

$P(\frac{2}{60} \leq T \leq \frac{6}{60}) = e^{-(12/30)} - e^{-(12/10)} = \mathbf{0.3691 = 36.91\%}$ ***(1.5 pts)***

5. Le temps moyen séparant deux requêtes successives

$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}} \boldsymbol{h} = \mathbf{5} \boldsymbol{minutes}$ ***(1 pts)***

Exercice 3 (7 pts)

Paramètres

Taux d'arrivée : $\lambda = 6\ vehicules/heure$

Temps moyen de service : $15\ min = 0{,}25\ h,\ \mu = 1/0.25 = 4\ vehicules/heure$ ***(0.5 pts)***

Nombre de cabines : $c = 2$

1. Le taux d'occupation, la probabilité qu'un véhicule doive attendre, et le temps moyen passé dans le système.

$\rho_s = \frac{\lambda}{c * \mu} = \frac{6}{2 * 4} = \frac{3}{4} = 0.75 = \mathbf{75\%}$ ***(0.5 pts)***

$$P_w = C(c,\rho) = \frac{\rho^c}{(c-1)! * (c-\rho)} * \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + (\frac{\rho^c}{c!} \cdot \frac{c}{c-\rho})\right]^{-1}$$

$$= \frac{(6/4)^2}{(2-1)! * (2-(6/4))} * \left[\sum_{n=0}^{1} \frac{(6/4)^n}{n!} + (\frac{(6/4)^2}{2!} \cdot \frac{2}{(2-(6/4))})\right]^{-1}$$

$$= 4.5 * (1/(2.5 + 4.5)) = 4.5 * (1/7) = \mathbf{0.64 = 64\%}$$ ***(0.5 pts)***

$$L_Q = C(c,\rho) * \frac{\rho}{c-\rho} = 0.64 * \frac{(6/4)}{2-(6/4)} = 0.64 * 3 = 1.92$$

$W = \frac{L_Q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{1.92}{6} + \frac{1}{4} = \mathbf{0.57}\ \boldsymbol{heures} = \mathbf{34.2}\ \boldsymbol{minutes}$ ***(0.5 pts)***

2. La probabilité que le temps total passé dans le système soit supérieur ou égal à : 10 minutes, 15 minutes et 20 minutes ***(2 pts)***

Pour un système $M/M/c$, la probabilité que le temps total W dépasse une valeur t est :

$$P(W > t) = e^{-\mu t}[1 + \frac{P_w}{c - 1 - (\lambda/\mu)}(1 - e^{-\mu t(c-1-(\lambda/\mu))})]$$

Temps	$P(W \geq t)$	Résultat
10 m = 1/6 h	$P(W \geq 0.167)$	**0.825 = 82.5%**
15 m = 1/4 h	$P(W \geq 0.25)$	**0.718 = 71.8%**
20 m = 1/3 h	$P(W \geq 0.333)$	**0.615 = 61.5%**

La probabilité de rester plus de 20 minutes est très élevée (plus de 60%). Cela s'explique par le fait que le taux d'occupation (75%) est assez important pour seulement 2 cabines, créant une congestion structurelle.

3. Le nombre minimal de cabines c nécessaire

On a $\lambda = 10$ et $\mu = 4$. Le système n'est stable que si $(\lambda/c * \mu) < 1 \Rightarrow \lambda < c * \mu$

$\frac{\lambda}{c*\mu} < 1 \ \Rightarrow \ \frac{\lambda}{\mu} < c \ \Rightarrow \ c > \frac{10}{4} \ \Rightarrow c > 2.5 \ \simeq \ c \geq 3$ ***(1 pts)***

- ***Cas 1 :*** $\boldsymbol{\lambda = 10}$**,** ***<u>objectif</u> :*** $\boldsymbol{L < 3}$

On calcule la valeur de L pour chaque cas de c

- Lorsque $c \ = \ 3$

$$C(c,\rho) = \frac{2.5^3}{(3-1)! * (3-2.5)} * \left[\sum_{n=0}^{2} \frac{2.5^n}{n!} + (\frac{2.5^3}{3!} \cdot \frac{3}{3-2.5})\right]^{-1} = 0.702$$

$$L_Q = C(c,\rho) * \frac{\rho}{c-\rho} = 0.702 * \frac{2.5}{3-2.5} = 3.51$$

$$L = \rho + L_Q = 2.5 + 3.51 = 6.01 > 3$$

- Lorsque $c \ = \ 4$, $L_Q = 0.53,\ L = 3.03$
- Lorsque $c \ = \ 5$, $L < 3$

Donc, pour $L < 3$, le nombre minimal de cabines nécessaire est de **5** cabines. ***(1 pts)***

- ***Cas 2 :*** $\boldsymbol{\lambda = 10}$**,** ***<u>objectif</u> :*** $\boldsymbol{W_Q < 10\ minutes}$

- Lorsque $c \ = \ 3$, $W_Q = L_Q/\lambda = 3.51/10 = 0.351\,h \ = 21.06\,minutes > 10$
- Lorsque $c \ = \ 4$, $W_Q = L_Q/\lambda = 0.53/10 = 0.053\,h \ = 3.18\,minutes \ < 10$

Donc, pour $W_Q < 10$, le nombre minimal de cabines nécessaire est de **4** cabines. ***(1 pts)***