# MESI - Examen Final

**(Durée:** 02 heures - **Documents et appareils électroniques non autorisés)**

## Exercice 1 (7 *pts*)

❖ Un chercheur utilise un générateur congruentiel linéaire (LCG) multiplicatif pour simuler des arrivées de paquets réseau. On considère les paramètres suivants : $m = 13,\ a = 6,\ X_0 = 1$

**1.** Définir ce qu'on entend par le concept du nombre pseudo-aléatoire.

**2.** La période de ce générateur est-elle maximale ? Justifiez votre réponse.

❖ On souhaite simuler à l'aide de la méthode d'acceptation/rejet une variable continue $X$ de densité :

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - x^2)\,, x \in [0, 1]$$

On choisit comme loi instrumentale une loi uniforme sur [0, 1], de densité $g(x) = 1$.

**1.** Déterminer la constante optimale $M$ correspondante.

**2.** Calculer la probabilité d'acceptation théorique.

**3.** En utilisant les couples des nombres uniformes $(y_i, u_i)$ suivants :(0.15, 0.3), (0.42, 0.6), (0.87, 0.1) , indiquez pour chaque couple si la valeur générée est acceptée ou rejetée.

## Exercice 2 (6 *pts*)

Un serveur de calcul reçoit des requêtes de traitement provenant d'utilisateurs distants. Les requêtes arrivent à un taux moyen constant de $\lambda = 12$ requêtes par heure.

On suppose que le nombre de requêtes reçues pendant un intervalle de temps suit une loi de Poisson et le temps (en heures) entre deux requêtes successives suit une loi exponentielle.

**1.** Calculer la probabilité qu'aucune requête n'arrive pendant un intervalle de 10 minutes.

**2.** Calculer la probabilité qu'au moins 2 requêtes arrivent pendant un intervalle de 5 minutes.4

**3.** Calculer la probabilité que le temps d'attente avant la prochaine requête soit supérieur à 8 minutes.

**4.** Calculer la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 2 et 6 minutes.

**5.** Calculer le temps moyen séparant deux requêtes successives.

***Rappel :***

**Loi exponentielle :** ***Densité*** : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , $t \geq 0$, ***Fonction de répartition:*** $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

**Loi de Poisson :** $$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

## Exercice 3 (7 *pts*)

Une station de contrôle technique automobile dispose de plusieurs cabines pour inspecter les véhicules. On observe que :

- En moyenne, 6 véhicules arrivent toutes les heures à la station.
- Chaque cabine inspecte un véhicule en 15 minutes en moyenne.
- Les cabines sont identiques et toutes disponibles, et la discipline de service est FIFO.

Si la station dispose de 2 cabines ($c = 2$),

**1.** Calculer le taux d'occupation, la probabilité qu'un véhicule doive attendre, et le temps moyen passé dans le système.

**2.** Calculer la probabilité que le temps total passé dans le système soit supérieur ou égal à : 10 minutes, 15 minutes et 20 minutes. Commenter les résultats.

Si le nombre de véhicules arrivant par heure augmente à 10, on souhaite :

- Limiter le nombre moyen de véhicules dans le système à moins de 3.
- Limiter le temps d'attente moyen dans la file à moins de 10 minutes.

**3.** Déterminer le nombre minimal de cabines $c$ nécessaire dans chaque cas.