

الإجابة النموذجية لامتحان السداسي الأول في مقياس تحليل البيانات

(01 نقطة على نظافة الورقة)

ملاحظة: تؤخذ النتائج بالتقريب إلى 10^{-2}

التمرين الأول (10 نقطة): يعطى التطبيق الخطي التالي:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + 0.8z \\ 0.8y + z \end{pmatrix}$$

1. أوجد مصفوفة التمثيل A للتطبيق الخطي T . ما نوعها؟ (01 نقطة)

$$A \cdot \vec{u} = T(\vec{u}) \rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + 0.8z \\ 0.8y + z \end{pmatrix}$$

$$T(e_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

المصفوفة A متناظرة.

2. أحسب القيم الذاتية ثم املأ الجدول. (04.5 نقطة)

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 0.8 \\ 0 & 0.8 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0.8 \\ 0.8 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 0.8^2) = 0 \rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 0.36) = 0$$

$$1 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 - 2\lambda + 0.36 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2.56, \quad \sqrt{\Delta} = 1.6, \quad \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{2 - 1.6}{2} = 0.2 \\ \frac{2 + 1.6}{2} = 1.8 \end{cases} \end{array} \right.$$

	F_1	F_2	F_3	المجموع
القيم الذاتية	$\lambda_1 = 1.8$	$\lambda_2 = 1$	$\lambda_3 = 0.2$	$\sum \lambda_i = 3$
النسب	$\lambda_1 / \sum \lambda_i = 0.6$	$\lambda_2 / \sum \lambda_i = 0.33$	$\lambda_3 / \sum \lambda_i = 0.07$	1
النسبة التراكمية	0.6	0.93	1	-

3. أحسب المتجهات الذاتية، ثم شكل مصفوفتها. (03.5 نقطة)

$$(A - \lambda I)\vec{u} = 0$$

الشعاع الذاتي الأول $\vec{u}_1$:

$$\lambda_1 = 1.8 \rightarrow (A - \lambda_1 I)\vec{u}_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & -0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -0.8x = 0 \\ -0.8y + 0.8z = 0 \\ 0.8y - 0.8z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{u}_1\| = \sqrt{2} \rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$$

الشعاع الذاتي الثاني $\vec{u}_2$:

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow (A - \lambda_2 I)\vec{u}_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0.8z = 0 \\ 0.8y = 0 \end{cases} \rightarrow \{y = z = 0\}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{u}_2\| = 1$$

الشعاع الذاتي الثالث $\vec{u}_3$:

$$\lambda_3 = 0.2 \rightarrow (A - \lambda_3 I)\vec{u}_3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0.8x = 0 \\ 0.8y + 0.8z = 0 \\ 0.8y + 0.8z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{u}_3\| = \sqrt{2} \rightarrow \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.71 \\ 0.71 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الأشعة الذاتية u :

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.71 & 0 & -0.71 \\ 0.71 & 0 & 0.71 \end{pmatrix}$$

4. اعتمادا على نسبة التباين المفسر، حدد عدد المركبات الرئيسية المختارة؟ (01 نقطة)

عدد المركبات الرئيسية هو 02 لأن المركبتين الأولى والثانية يفسران معا معظم التباين نسبة 93% من التباين الكلي.

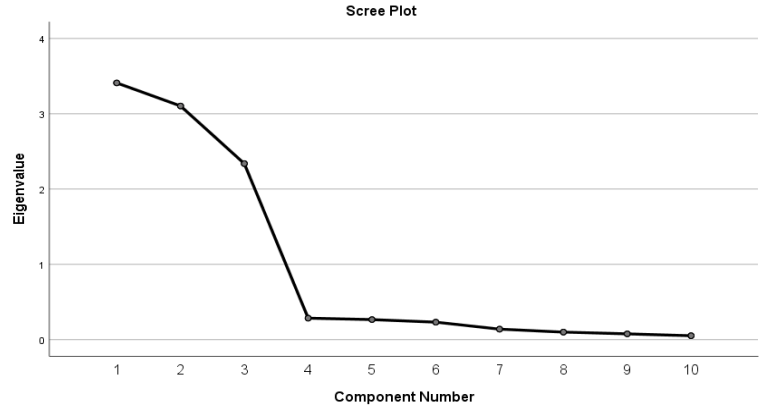
التمرين الثاني (09 نقطة): تمثل الجداول التالية والشكل المرفق مخرجات برنامج SPSS، لتحليل العلاقة بين مجموعة متغيرات اقتصادية باستخدام

تقنية التحليل بالمركبات الرئيسية PCA:

	Total	% of Variance
1	3.13	31.3
2	2.85	28.5
3	2.65	26.5
4	.38	3.8
5	.36	3.6
6	.23	2.3
7	.15	1.5
8	.11	1.1
9	.09	.9
10	.05	.5

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.	.754
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square
	583.626
	df
	45
	Sig.
	.000

	1	2	3
احتياطي الصرف (مليار دولار)	.977	-.008-	.014
النمو الاقتصادي (%)	.967	.055	.081
سعر الصرف (دولار/دينار)	.799	-.052-	.086
نسبة الديون المتعثرة (%)	.771	.159	-.124-
الائتمان الممنوح (%)	.020	.973	-.091-
نمو الكتلة النقدية M2 (%)	.063	.967	-.109-
السيولة البنكية (%)	.004	.957	.038
معدل التضخم (%)	-.013-	-.059-	.966
سعر الفائدة (%)	.073	.003	.937
تكلفة الاقتراض (%)	.027	-.132-	.888



1. ما هي المصفوفة التي تم اعتمادها في التحليل بالمركبات الرئيسية؟ علل. (01 نقطة)

المصفوفة المعتمدة في التحليل هي مصفوفة الارتباطات لأن البيانات غير متجانسة (اختلاف في وحدات القياس) / مجموع القيم الذاتية يساوي 10 وهو عدد القيم الذاتية $\sqrt{\lambda_i} = 3.13 + 2.85 + 2.65 + \dots + 0.05 = 10$

2. في إطار دراسة قابلية تطبيق التحليل بالمركبات الرئيسية، اختبر الفرضية: $H_0: R = I$ ، ثم فسر النتيجة إحصائياً. (01.5 نقطة)

حسب نتائج اختبار بارتلليت $Sig = 0 < \alpha = 0.05$ ، إذا نرفض الفرضية الصفريّة أي أن مصفوفة الارتباطات تختلف عن مصفوفة الوحدة ($R \neq I$)، بمعنى أنه توجد ارتباطات معنوية بين المتغيرات وعليه البيانات صالحة للتحليل بالمركبات الرئيسية.

3. أحسب التباين المفسر للمركبات الثلاثة الأولى، إذا علمت أن القصور الكلي $Inertia = 7.2$. (01.5 نقطة)

$$V(F_i) = \% \text{ of Variance}_i \times Inertia$$

تباين المركبة الأولى:

$$V(F_1) = \% \text{ of Variance}_1 \times Inertia = 0.313 \times 7.2 = 2.25$$

تباين المركبة الثانية:

$$V(F_2) = \% \text{ of Variance}_2 \times Inertia = 0.285 \times 7.2 = 2.05$$

تباين المركبة الثالثة:

$$V(F_3) = \% \text{ of Variance}_3 \times Inertia = 0.265 \times 7.2 = 1.91$$

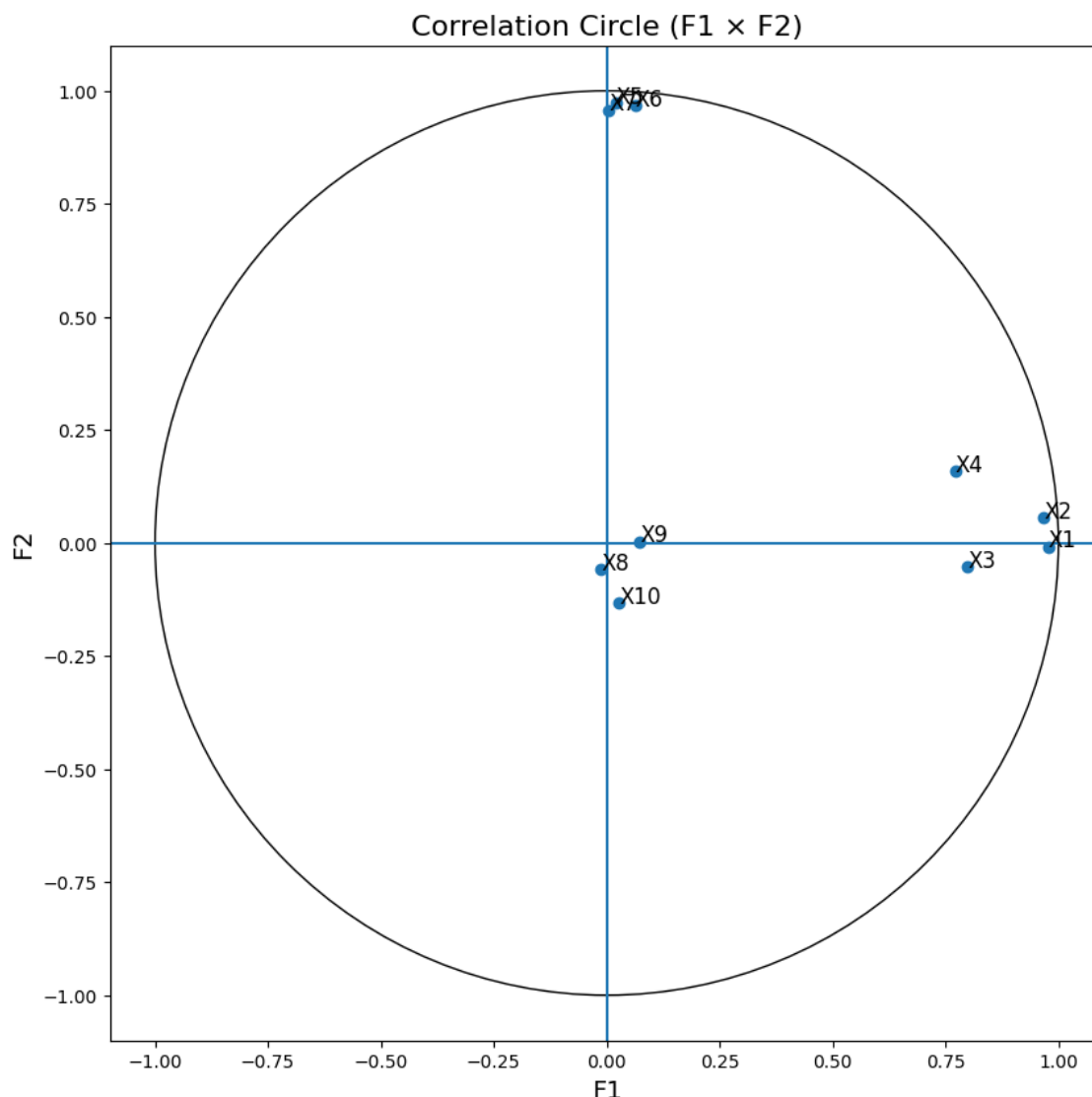
4. اعتماداً على مخطط القيم الذاتية ومعياري كايزر، كم عدد المركبات الرئيسية المختارة؟ (01.5 نقطة)

حسب مخطط القيم الذاتية، عدد المركبات الرئيسية التي يجب الاحتفاظ بها هو 3 لأن نقطة الانحناء (المرفق) كانت عند المركبة الرابعة. وحسب معيار كايزر، عدد المركبات الرئيسية التي يجب الاحتفاظ بها هو 3 لأن:

$$\lambda_1 = 3.13 > 1, \quad \lambda_2 = 2.85 > 1, \quad \lambda_3 = 2.65 > 1$$

5. مثل المتغيرات في الفضاء الجديد باستخدام المركبة الرئيسية الأولى والثانية، ثم حلل الشكل الناتج من خلال: (03.5 نقطة)

- تحديد المتغيرات الأكثر مساهمة في كل مركبة.
- دراسة العلاقات بين المتغيرات.



نلاحظ من الشكل أن المتغيرات الأكثر مساهمة في تشكيل المركبة الأولى هي أربعة متغيرات، مرتبة تنازلياً حسب درجة مساهمتها كما يلي:
احتياطي الصرف (X_1)، النمو الاقتصادي (X_2)، سعر الصرف (X_3)، ونسبة الديون المتعثرة (X_4).

أما المتغيرات الأكثر مساهمة في تشكيل المركبة الثانية هي ثلاثة متغيرات، مرتبة تنازلياً حسب درجة مساهمتها كما يلي:
الائتمان الممنوح (X_5)، نمو الكتلة النقدية (X_6)، والسيولة البنكية (X_7).

• العلاقات بين المتغيرات: (ذكر على الأقل علاتين)

نلاحظ من خلال الشكل أن المتغيرات احتياطي الصرف (X_1)، النمو الاقتصادي (X_2)، سعر الصرف (X_3)، ونسبة الديون المتعثرة (X_4) قريبة من بعضها البعض (ذات أسهم طويلة وزوايا صغيرة فيما بينها)، وهذا يدل على وجود ارتباط موجب قوي بينها. كما نلاحظ:

- وجود ارتباط قوي موجب بين المتغيرات الثلاثة: الائتمان الممنوح (X_5)، نمو الكتلة النقدية (X_6)، والسيولة البنكية (X_7).
- عدم وجود ارتباط بين احتياطي الصرف (X_1) والسيولة البنكية (X_7).
- وجود ارتباط ضعيف موجب بين النمو الاقتصادي (X_2) ونسبة الديون المتعثرة (X_4) مع الائتمان الممنوح (X_5)، نمو الكتلة النقدية (X_6)، والسيولة البنكية (X_7).
- وجود ارتباط ضعيف سالب بين سعر الصرف (X_3) والسيولة البنكية (X_7).

بالتوفيق.