CORRIGE INTERROGATION N2

Exercice 01 (10pts)

I.

1. Calcul du Lagrangien du système :

Ddl=1 $y = l\theta$ (0,5 pts)

- L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

- L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k_1{y_1}^2 + \frac{1}{2}k_2{y_2}^2 \qquad E_p = \frac{1}{2}k_1l_1^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2l_2^2\theta^2 \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

- La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2$ (0,5 pts)

- Le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1l_1^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2l_2^2\theta^2 \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

2. L'équation différentielle du mouvement :

- Système libre amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial\theta} = -k_1l_1^2\theta - k_2l_2^2\theta \quad \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha l^2\dot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + k_1l_1^2\theta + k_2l_2^2\theta = 0 \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{ml^2}\right)\theta = 0 \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

- la pulsation propre et la pseudo-période :

Cette equation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

Par identification :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{ml^2}} \quad (0{,}5 \text{ pts}) \qquad \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k_1l_1^2 + k_2l_2^2}{ml^2} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} \qquad T_a = \frac{"\pi}{\omega_a} \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

3. La solution dans le cas d´amortissement faible:

$$\theta(t) = A\,e^{-\delta t}\,\cos(\omega_a t + \varphi) \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

$$\dot{\theta}(t) = -\delta A\,e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi) - A\,e^{-\delta t}\,\omega_a \sin(\omega_a t + \varphi) \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

Conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(0) = 0$

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_a}\theta_0 \quad (0{,}5 \text{ pts}) \qquad \varphi = -arctg\left(\frac{\delta}{\omega_a}\right) \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

$$\theta(t) = \left(\frac{\omega_0}{\omega_a}\theta_0\right)\,e^{-\delta t}\,\cos\left(\omega_a t - arctg\left(\frac{\delta}{\omega_a}\right)\right) \quad (0{,}5 \text{ pts})$$

II. En présence d'une force verticale harmonique : $F(t) = F_0 cos\,\omega_e t$

$$ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + k_1 l_1^2\theta + k_2 l_2^2\theta = F_0 cos\ \omega_e t$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}{ml^2}\right)\theta = \frac{F_0}{ml^2} cos\ \omega_e t \quad \text{(0,5 pts)}$$

De la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = F cos\ \omega_e t$$

La nouvelle solution : $\theta'(t) = A\,e^{-\delta t}\ \cos(\omega_a t + \varphi) + A'\ \cos(\omega_e t + \psi)$ (0,5 pts)

$$A' = \frac{\left(\frac{F_0}{ml^2}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_e^2}} \quad \text{(0,5 pts)} \qquad \psi = -arctg\left[\frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right] \quad \text{(0,5 pts)}$$

Exercice 02 (10pts)

1. **Ddl=2** x_1, x_2 (0,5 pts)

- L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$ (0,5 pts)
- L'énergie potentielle : $E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$ (0,5 pts)
- La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$ (0,5 pts)

2. L'équation différentielle du mouvement :

- Le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \quad \text{(1 pt)}$$

- Système forcé amorti :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases} \quad \text{(1 pt)} \qquad \begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = \frac{F(t)}{m} \\ \ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{(1 pt)}$$

3. La solution en régime permanant :

$$x_{1H}(t) = x_{2H}(t) = 0 \quad \text{(0,5 pts)}$$

$$x_1(t) = X_1\,e^{i(\Omega t + \varphi_1)} = \overline{X_1}\ \ e^{i\Omega t} \quad \text{(1 pt)}$$

$$x_2(t) = X_2\,e^{i(\Omega t + \varphi_2)} = \overline{X_2}\ \ e^{i\Omega t} \quad \text{(1 pt)}$$

$$\begin{bmatrix} -\Omega^2 + 2\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\Omega^2 + \frac{k}{m} + i\Omega\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{KA}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(1 pt)}$$

$$det = \left(-\Omega^2 + 2\frac{k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + i\Omega\frac{\alpha}{m}\right) - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad \text{(1 pt)}$$

$$\overline{X_1} = \frac{1}{det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + i\Omega\frac{\alpha}{m}\right) \quad \text{(0,25 pts)}$$

$$\overline{X_2} = \frac{1}{det}\left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 \alpha\right] \quad \text{(0,25 pts)}$$