EMD Ondes et Vibrations

<u>Questions de cours</u> (5 pts)

1. $ddl = n - r$

n : le nombre de coordonnées généralisées et **r** :le nombre de relations. **(0,5 pts)**

2. Le décrément logarithmique représente la rapidité de décroissance des élongations par: $\xi = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$ **(0,5 pts)** .

3. Dans le cas d´un système fortement amorti, le régime des oscillations est appelé **régime apériodique**. **(0,5 pts)**

4. Les différents types de couplage des systèmes à plusieurs degrés de liberté :
   - **Couplage par élasticité.**
   - **Couplage par inertie.** **(0,75 pts)**
   - **Couplage visqueux** .

5. Les équations différentielles des oscillations forcées amorties d´un système à deux degrés de liberté :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = a_1 q_2 + F \\ \ddot{q}_2 + 2\delta_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = a_2 q_1 + F \end{cases}$$ **(0,5 pts)**

6. Les types d´ondes :

Ondes planes, ondes longitudinales, ondes transversales, ondes progressives, ondes stationnaires. **(1,25 pts)**

7. L'équation de propagation d´une onde se propageant dans la direction Ox :

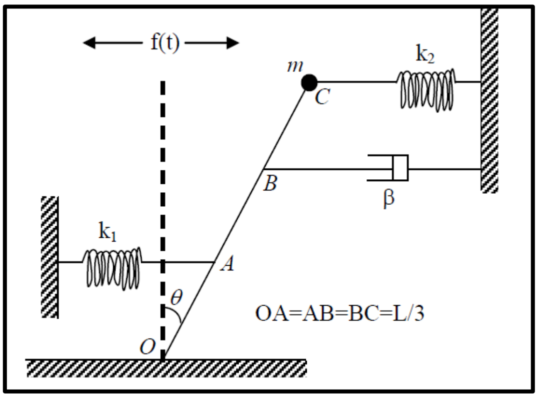
$$\frac{\partial^2 S(X,t)}{\partial X^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S(X,t)}{\partial t^2} = 0$$ **(0,5 pts)**

8. La définition de l´impédance acoustique : Elle est définie par le rapport de l´amplitude complexe de la pression à l´amplitude complexe de la vitesse :

$$Z(x) = \frac{P}{\dot{u}}$$ **(0,5 pts)**

Exercice 01 (10pts)

I. Système de la figure **1**.



1. L´équation differentielle du mouvement du système :

Ddl=1 $\theta(t)$ **(0,25 pts)**

- L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

- L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{L}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2L^2\theta^2 \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

- La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{2L}{3}\right)^2\dot{\theta}^2$ **(0,25 pts)**
- Le Lagrangien :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1\left(\frac{L}{3}\right)^2\theta^2 - \frac{1}{2}k_2L^2\theta^2 \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

- Système forcé amorti :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = F_{ext} \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \beta\left(\frac{2L}{3}\right)^2\dot{\theta} + k_1\left(\frac{L}{3}\right)^2\theta + k_2L^2\theta = F_{ext}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4}{9m}\beta\dot{\theta} + \left(\frac{k_1}{9m} + \frac{k_2}{m}\right)\theta = \frac{1}{ml^2}\cos(2t) \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$\ddot{\theta} + 2\,\dot{\theta} + 30\,\theta = 20\cos(2t) \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

2. Calcul de la pulsation propre, la pseudo-pulsation) et le décrément logarithmique :

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{k_1}{9m} + \frac{k_2}{m}\right)} = \sqrt{\left(\frac{9}{9.0,2} + \frac{5}{0,2}\right)} = \sqrt{30} = 5,48\,rad/s \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$\delta = \frac{2}{9m}\beta = \frac{2}{9.0,2}0,9 = 1 \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{30-1} = 5,38\,rad/s \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$\xi = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{29}} = 1,17 \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

3. Calcul de la solution permanente :

$$\ddot{\theta} + 2\,\dot{\theta} + 30\,\theta = 20\cos(2t)$$

$$\theta_p(t) = \theta_0\ \cos(\omega_e t + \psi) = \theta_0\ \cos(2t + \psi)$$ **(0,25 pts)**

$$\theta_0 = \frac{\left(\frac{F_0}{ml^2}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_e^2}} = \frac{20}{\sqrt{(30-4)^2 + 4.1.4}} = 0,76\,rad$$ **(0,25 pts)**

$$\psi = -arctg\left[\frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right] = -arctg\left[\frac{4}{26}\right] = -8,75\,rad$$ **(0,25 pts)**

$$\theta_p(t) = 0,76\ \cos(2t - 8,75)$$ **(0,25 pts)**

4. Calcul de la solution transitoire :

La solution transitoire est la solution de l´equation differentielle homogène (sans second membre)

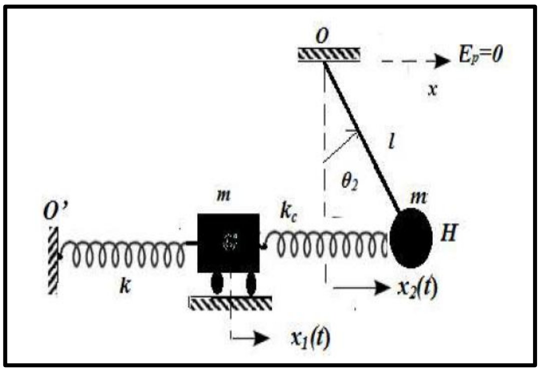
$$\ddot{\theta} + 2\,\dot{\theta} + 30\,\theta = 0$$

$$\theta_H(t) = A\,e^{-\delta t}\ \cos(\omega_a t + \varphi)$$ **(0,25 pts)**

$$A\,e^{-t}\ \cos(5,38t + \varphi)$$

A et φ sont déterminés en appliquant les conditions aux limites.**(0,25 pts)**

II. système de la figure **2.**



1. Calcul du Lagrangien du système :

Ddl=2 $\quad x_1(t)\ \ x_2(t) = l\theta_2(t)$ **(0,5 pts)**

- L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$ **(0,5 pts)**

- L'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2 - mgl\ \cos\theta$$ **(0,5 pts)**

- Le Lagrangien :

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k_c(x_2 - x_1)^2 + mgl\ \cos\theta$$ **(0,25 pts)**

2. C´est des oscillations d´un système a deux degrés de liberté libre non amorti. **0,25 pts)**

3. Les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{k_c}{m}\right) x_1 - \frac{k_c}{m} x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k_c}{m}\right) x_2 - \frac{k_c}{m} x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (\Omega_1^2 + \Omega^2) x_1 - \Omega^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + (\Omega_2^2 + \Omega^2) x_2 - \Omega^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

4. Pour déterminer les pulsations propres du système on procède de la manière suivante :

On considère les solutions sous la forme suivante :

$$x_1(t) = A\ \cos(\omega_p t + \varphi) \qquad x_2(t) = B\ \cos(\omega_p t + \varphi) \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

En remplaçant dans le système différentiel, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left(-\omega_p^2 + \Omega_1^2 + \Omega^2\right) A - \Omega^2 B = 0 \\ -\Omega^2 A + \left(-\omega_p^2 + \Omega_2^2 + \Omega^2\right) B = 0 \end{cases} \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

$$\begin{bmatrix} \left(-\omega_p^2 + \Omega_1^2 + \Omega^2\right) & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \left(-\omega_p^2 + \Omega_2^2 + \Omega^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

Le système admet des solutions non nulles si et seulement si :

$$det = 0 \ \Rightarrow \left(-\omega_p^2 + \Omega_1^2 + \Omega^2\right)\left(-\omega_p^2 + \Omega_2^2 + \Omega^2\right) - \Omega^4 = 0 \quad \textbf{(0,25 pts)}$$

Cette equation nous permet de déterminer les pulsations propres : ω_{p_1} et ω_{p_2}

5. La forme de la solution générale :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos\left(\omega_{p_1} t + \varphi\right) + A_2 \cos\left(\omega_{p_2} t + \varphi\right) \\ x_2(t) = B_1 \cos\left(\omega_{p_1} t + \varphi\right) + B_2 \cos\left(\omega_{p_2} t + \varphi\right) \end{cases} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

Exercice 02 (5 pts)

$L = 2\,m \quad m = \ 0,01\,kg \quad T = 10\,N$

1. L´equation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$ **(0,75 pts)**

2. Calcul de la vitesse de propagation, les pulsations propres et les fréquences propres :

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}01}{2} = 0,005\ \ kg/m$$ **(0,5 pts)**

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}005}} = 44,72\ m/s$$ **(0,5 pts)**

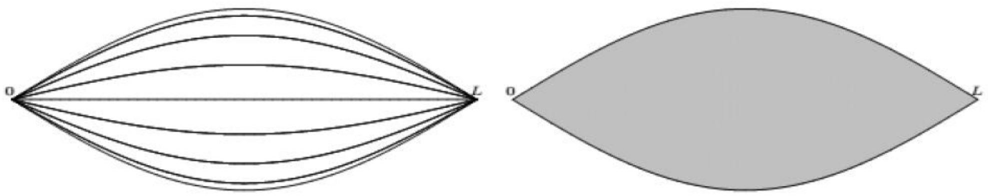
$$f_n = \frac{nc}{2L} = \frac{n\ 44{,}72}{2.2} = 11,18\ .\ n\ \ Hz$$ **(0,75 pts)**

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi\ \ (11,18) = 70,25\,.\,n\ \ rad/s$$ **(0,75 pts)**

3. La forme de la corde lorsqu'elle oscille dans le mode fondamental **(n=1) :**

$$\omega_1 = 70,25\ \ rad/s$$ **(0,5 pts)**

$$y_1(x,t) = A\,sin\,\left(\frac{\pi}{L}x\right)\ cos(\omega_1 t) = A\,sin\,\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ cos(70,25\ \ t)$$ **(0,5 pts)**



(0,75 pts)