

TD n°1: Développement limité

Exercice 1 Calculer les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \sin(2x) - 2 \cos(x)$, $n = 4$.
2. $f_2(x) = (x + x^2)^2 + \cos x$, $n = 3$.
3. $f_3(x) = \sqrt{1 + 2x} + \sqrt[3]{1 + 3x}$, $n=2$.
4. $f_4(x) = \cos^2 x$, $n = 3$.
5. $f_5(x) = (1 + x^2)^2 \cos x$, $n = 3$.

Exercice 2 Calculer les développements limités au voisinage de 0 des fonctions suivantes

1. $g_1(x) = \ln(1 + \sin(2x))$, $n = 3$.
2. $g_2(x) = \sin(\ln(1 + x))$, $n = 3$.
3. $g_3(x) = \sqrt{e^x + \cos x}$, $n = 2$.
4. $g_4(x) = e^{1+x}$, $n = 2$.
5. $g_5(x) = \ln(5 + 3x)$, $n = 2$.
6. $g_6(x) = \frac{1}{1-\sin x}$, $n = 2$, $g_7(x) = \frac{1}{4+3x}$, $n = 2$.
7. $g_8(x) = \ln(1 + x)^{\frac{\sin x}{x}}$, $n = 3$, $g_9(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$, $n = 3$.

Exercice 3

1. Calculer les développements limités au voisinage de 1 à l'ordre 3 des fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = e^{\sqrt{x}}$.
2. Calculer un développement limité au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 3 de la fonction $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$.

Exercice 4 Utiliser les développements limités pour calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x + x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{1 - \sqrt{1 - 3x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes dont on donne le développement limité, déterminer une équation de sa droite tangente en 0 et la position relative de la courbe et de sa droite tangente au voisinage de 0. Dire s'il s'agit d'un extremum local.

1. $f(x) = \sin(2x) - 2 \cos x$.
2. $g(x) = \sqrt{\cos x}$.