

الدوال الأولية Fonctions élémentaires

Introduction.

Les **fonctions usuelles** sont les fonctions suivantes: La fonction puissance - La fonction exponentielle - La fonction logarithme - Les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus, tangente et cotangente).

On appelle **fonction élémentaire** toute fonction obtenue à partir d'un nombre fini de compositions et d'opérations arithmétiques (+ - × ÷) de fonctions usuelles.

Fonctions trigonométriques inverses.

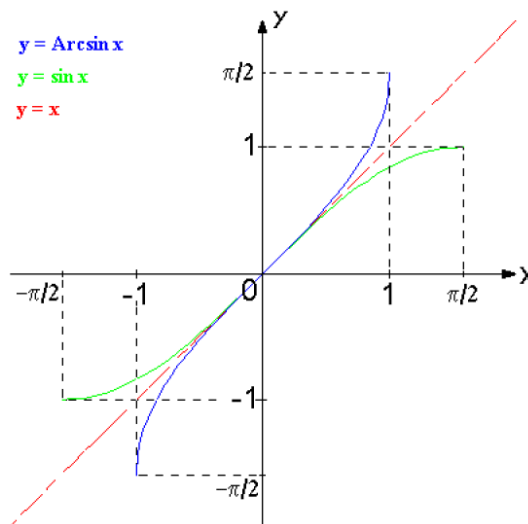
Fonction arcsinus.

Définition 1. La restriction de la fonction **sinus** à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est bijective, donc elle est inversible et son inverse est appelée **fonction arcsinus** :

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \arcsin x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Le graphe de $\arcsin x$



Proposition 1.

- 1) $\arcsin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 2) La fonction arcsinus est impaire et strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- 3) $\forall x \in [-1, 1] : \sin(\arcsin x) = x$.
- 4) $\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin y) = y$.
- 5) $\forall x \in [-1, 1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Remarque. La propriété 4) est fausse si x appartient à d'autres intervalles. Par exemple :

$$\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$$

Exemple. Voici un tableau de valeurs de la fonction arcsinus :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sin y$
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	y

Proposition 2. La fonction arcsinus est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

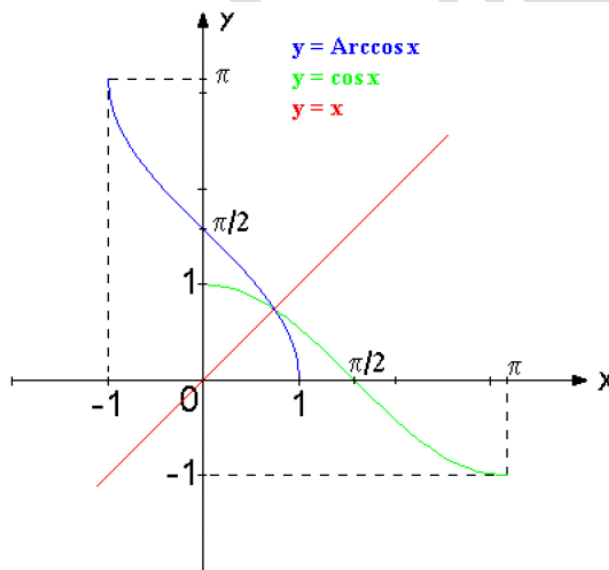
Fonction arccosinus.

Définition 2. La restriction de la fonction **cosinus** à l'intervalle $[0, \pi]$ est bijective, donc elle est inversible et son inverse est appelée **fonction arccosinus** :

$$\begin{aligned} \arccosin : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\mapsto \arccos x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = \cos y$, $y \in [0, \pi]$.

Le graphe de $\arccos x$



Proposition 3.

- 1) $\arccos x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- 2) La fonction arcsinus est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.
- 3) $\forall x \in [-1, 1] : \cos(\arccos x) = x$.
- 4) $\forall y \in [0, \pi] : \arccos(\cos y) = y$.
- 5) $\forall x \in [-1, 1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
- 6) $\forall x \in [-1, 1] : \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Remarques. La propriété 4) est fausse si x appartient à d'autres intervalles. Par exemple :

$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4}$$

La fonction $\arccos x$ n'est ni paire ni impaire.

Exemple. Voici un tableau de valeurs de la fonction arccosinus :

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos y$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y

Proposition 4. La fonction arccosinus est dérivable sur $] -1, 1[$ et on a

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

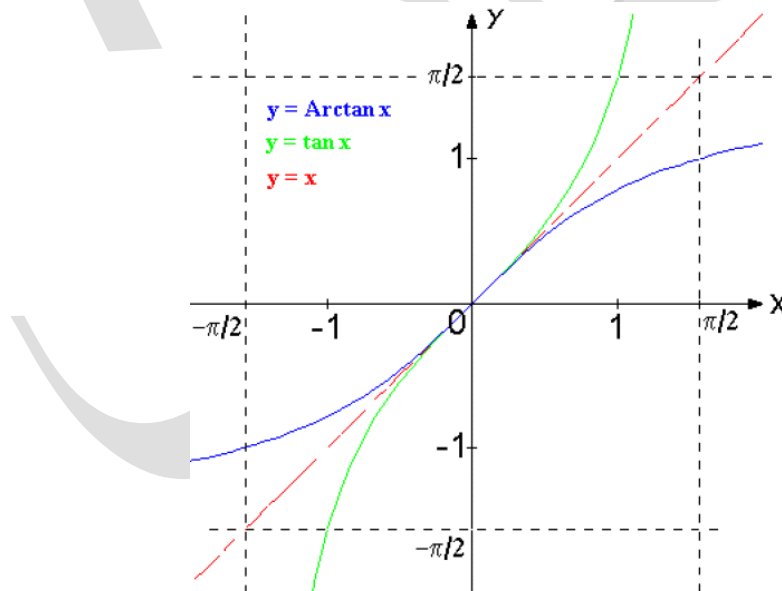
Fonction arctangente.

Définition 3. La restriction de la fonction **tangente** à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est bijective, donc elle est inversible et son inverse est appelée **fonction arctangente** :

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \arctan x$, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \tan y$, $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le graphe de $\arctan x$



Proposition 5.

- 1) $\arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 2) La fonction $\arctan$ est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) = x$.
- 4) $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \arctan(\tan y) = y$.
- 5) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Remarque. La propriété 4) est fausse si x appartient à d'autres intervalles. Par exemple :

$$\arctan\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4}$$

Exemple. Tableau de valeurs de la fonction arctangente :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	$\tan y$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	y

Proposition 6. La fonction arcsinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

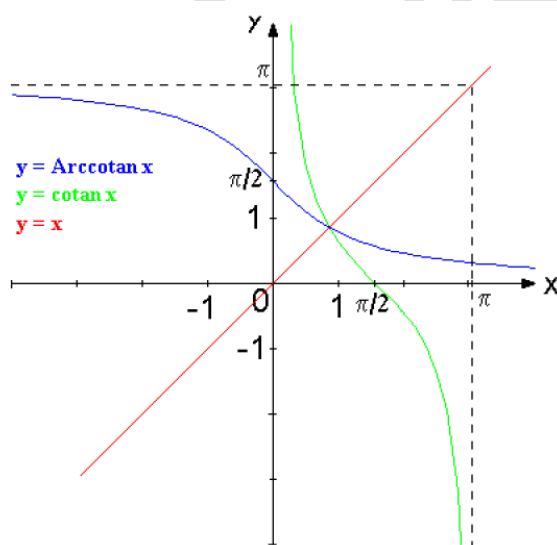
Fonction arccotangente.

Définition 4. La restriction de la fonction **tangente** à l'intervalle $]0, \pi[$ est bijective, donc elle est inversible et son inverse est appelée **fonction arccotangente** :

$$\begin{aligned} \operatorname{arccotan} : \mathbb{R} &\rightarrow]0, \pi[\\ x &\mapsto \operatorname{arccotan} x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \operatorname{arccotan} x$, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \cotan y$, $y \in]0, \pi[$.

Le graphe de $\arctan x$



Proposition 7.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arccotan} x \neq 0$, $\operatorname{arccotan}(-x) = \pi - \operatorname{arccotan} x$.
- 2) La fonction *arccotan* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} : \cotan(\operatorname{arccotan} x) = x$, $\arctan x + \operatorname{arccotan} x = \frac{\pi}{2}$.
- 4) $\forall y \in]0, \pi[: \operatorname{arccotan}(\cotan y) = y$.
- 5) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(\operatorname{arccotan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos(\operatorname{arccotan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\tan(\operatorname{arccotan} x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 8. La fonction arcsinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\operatorname{arccotan})'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

Fonctions hyperboliques .

Définitions 5. On appelle fonctions hyperboliques les fonctions suivantes:

1) La fonction **sinus hyperbolique** définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) La fonction **cosinus hyperbolique** définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

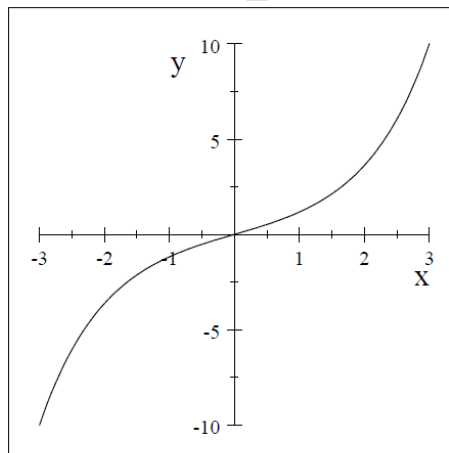
3) La fonction **tangente hyperbolique** définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

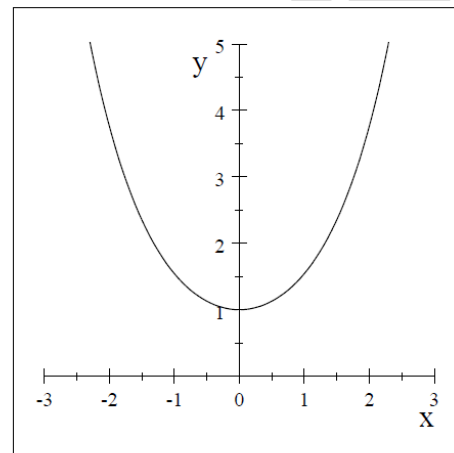
4) La fonction **cotangente hyperbolique** définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

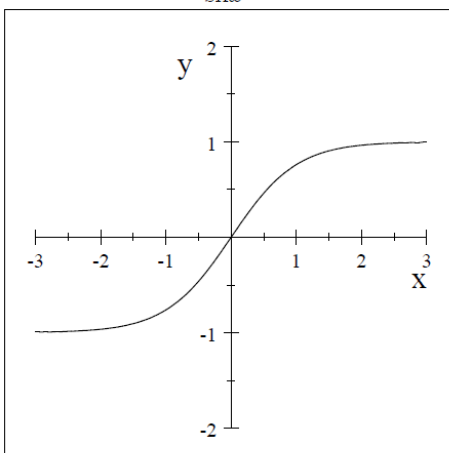
Les graphes des fonctions hyperboliques :



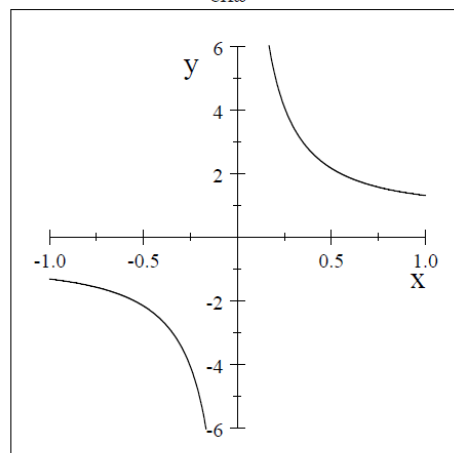
$\operatorname{sh} x$



$\operatorname{ch} x$



$\operatorname{th} x$



$\operatorname{cth} x$

Proposition 9.

- 1) $\operatorname{sh} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\operatorname{ch} x \geq 1$, $\operatorname{ch} x > \operatorname{sh} x$.
- 2) $\operatorname{th} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\operatorname{coth} x \neq 0$.
- 3) $\operatorname{sh} x = -\operatorname{sh}(-x)$, $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x)$, $\operatorname{th} x = -\operatorname{th}(-x)$, $\operatorname{coth} x = -\operatorname{coth}(-x)$.
- 4) $|\operatorname{th} x| < 1$, $|\operatorname{coth} x| > 1$.

- 5) $\text{sh}(x \pm x') = \text{sh } x \cdot \text{ch } x' \pm \text{ch } x \cdot \text{sh } x'$, $\text{ch}(x \pm x') = \text{ch } x \cdot \text{ch } x' \pm \text{ch } x \cdot \text{ch } x'$.
- 6) Cas particulier : $\text{sh}(2x) = 2\text{sh } x \cdot \text{ch } x$, $\text{ch}(2x) = \text{ch}^2 x + \text{sh}^2 x$, $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.
- 7) $\text{ch } x + \text{sh } x = e^x$, $\text{ch } x - \text{sh } x = e^{-x}$, $(\text{ch } x + \text{sh } x)^n = \text{ch } nx + \text{sh } nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- 8) Les fonctions **sh** et **th** sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. La fonction **ch** est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction **coth** est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Fonctions hyperboliques inverses.

Définitions 6 On appelle fonctions hyperboliques inverses les fonctions suivantes:

- 1) La fonction « **argument sinus hyperbolique** » (inverse de sinus hyperbolique) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \text{argsh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{argsh } x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \text{argsh } x$, $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \text{sh } y$, $y \in \mathbb{R}$.

- 2) La fonction « **argument cosinus hyperbolique** » (inverse de cosinus hyperbolique) définie par

$$\begin{aligned} \text{argch} : [1, +\infty[&\rightarrow [0, +\infty[\\ x &\mapsto \text{argch } x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \text{argch } x$, $x \in [1, +\infty[\Leftrightarrow x = \text{ch } y$, $y \in [0, +\infty[$.

- 3) La fonction « **argument tangente hyperbolique** » (inverse de tangente hyperbolique) définie par

$$\begin{aligned} \text{argth} :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \text{argth } x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \text{argth } x$, $x \in]-1, 1[\Leftrightarrow x = \text{th } y$, $y \in \mathbb{R}$.

- 4) La fonction « **argument cotangente hyperbolique** » (inverse de cotangente hyperbolique) définie par

$$\begin{aligned} \text{argcoth} :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto \text{argcoth } x \end{aligned}$$

Dans ce cas on a : $y = \text{argcoth } x$, $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\Leftrightarrow x = \text{coth } y$, $y \in \mathbb{R}^*$.

Proposition 10.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R} : \text{argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- 2) $\forall x \geq 1 : \text{argch } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$
- 3) $\forall x \in]-1, 1[: \text{argth } x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$
- 4) $\forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[: \text{argcoth } x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$.