Exercices - TCCEI.

Exercice1.

Soit le code binaire C = {0000, 1011, 0101, 1110}.

1) Quelle est la longueur du code ?

2) Quelle est la distance minimale du code ?

3) Ce code C vérifie-t-il la condition de décodage d'ordre e = 1 ?

Exercice 2.

Soit le code trinaire C = {0000, 1212, 2011, 0121}.

1) Quels les parameters du code C?

2) Quelle est la capacité de correction de ce code ?

3) Le code C est-il parfait ?

Exercice 3.

On considère le code linéaire binaire C(n, k, d) définie par une matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}.$$

a. Quelles sont la longueur *n*, la dimension *k* et la distance d de ce code?

b. Montrer que C est systématique et donner sa matrice génératrice G_N.

c. Trouver le mot code c provenant du mot x=1010 par G_N

d. Décoder si possible les mots y_1=11111000, y_2=11000001, y_3=01011101

Exercice 4.

Soit C(n, k, d) un code linéaire de matrice de contrôle H et r $\in \mathrm{IN}^*$.

Montrer que : d ≥ (r+1) si et seulement si tout sous-ensemble de r colonnes de H est libre.

Exercice 5.

On considère le code linéaire trinaire (sur le corps F_3) C(n, k, d) définie par son code orthogonal $C^\perp$ $=\{(x_1 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_3,\ x_2,\ x_3) / \ x_i \in F_3\ \}$

1. Déterminer une base de $C^\perp$ et déduire la longueur n et la dimension *k* du code C?
2. Déduire une matrice de contrôle H de C et sa distance minimale d.
3. Montrer que C est systématique et donner sa matrice génératrice normalisée G_N, et construire le code C.
4. Décoder si possible les mots y_1=22021, y_2=21211, y_3=11120, y_4=11110

Exercice 6.

Soit C(n, k, d) un code binaire, et H sa matrice de contrôle.

1. Montrer que la distance minimale d est le plus petit nombre de colonnes de H telles que leur somme soit nulle.
2. Déduire que si tout sous-ensemble de r-1 colonnes de H est libre, alors d ≥ r.

Exercice 7.

Soit d la distance minimale d'un code linéaire C. Montrer que si $d \geq 3$ alors C vérifie la condition de décodage d'ordre 1.

Exercice 8.

Soit C(n, k, d) le code binaire de matrice génératrice G définie par : $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les paramètres n et k. Montrer que C n'est pas systématique.

2. Montrer que C est équivalent à un code systématique C_s (en appliquant la permutation τ_{14}) qu'on détermine sa matrice génératrice normalisée G_N. Construire le code C_s.

3. Déduire une matrice de contrôle H_N du code C_s. Calculer par deux méthodes la distance d.

4. Corriger si possible les mots suivants : y_1=111100, y_2=111101, y_3=100010.

Exercice 9.

Soit C(n, k, d) le code binaire de matrice de contrôle G définie par :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que C est systématique et déterminer les paramètres n et k.
2. Détermine sa matrice génératrice normalisée G_N. Construire le code C.
3. Corriger si possible les mots suivants : y_1=0001110, y_2=0010100.

Exercice 10.

Soit C(n, k, d) un code binaire sur l'alphabet A (c.à.d. A={0, 1}, q=|A|=2). $r \in \mathbb{N}^*$

1. Pour tout $x \in A^n$ on note $B(x, r)=\{y \in A^n : d(x, y) \leq r\}$ la boule de centre x et de rayon r et $S(x, i) = \{y \in A^n : d(x, y) = i\}$ la sphère de centre x et de rayon i.

Montrer que $|B(x, r)| = \sum_{i=1}^{i=r} |S(x, i)| = \sum_{i=0}^{i=r} C_n^i$.

2. Si le code C est de capacité e et Sachant que : $\bigcup_{x \in C} B(x, e) \subset A^n$.

Montrer que: $|\mathbf{C}| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{i=e} C_n^i}$.

Remarques. 1) $|\,.\,|$ représente le cardinal. 2) $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Exercice 11.

Soit C un code linéaire binaire de type (n, k, d), on définit le code étendu C'(n', k', d') comme suit :

$C' = \{ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in F_2^{n+1}$ tels que $(x_1, \dots, x_n) \in C$ et $\sum_{i=1}^{i=n+1} x_i = 0\}$.

1- Déterminer les paramètres n', k' respectivement en fonction des paramètres n, k.

2- Donner selon la polarité de d , la distance d' en fonction de d.

Exercice 12.

Soit C un code linéaire de type (n, k, d) sur un corps fini $\mathbb{K}$

1. Montrer que C peut détecter d-1 erreurs et peut corriger [(d-1)/2] erreurs.
2. Si d = 2t+1 (impaire) et u, v deux mots de $\mathbb{K}^n$ tel que w(u) ≤ t et w(v) ≤ t, montrer qu'ils ont des syndromes différents, et que $\sum_{i=1}^{i=t} C_n^i \leq 2^{n-k}$.

Exercice 13.

Soit C(n, k, d) le code binaire de matrice de contrôle H définie par :

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les paramètres n et k. Montrer que C est systématique.
2. Détermine sa matrice génératrice normalisée $\mathrm{G_N}$. Construire le code C.
3. Calculer la distance d.
4. Calculer la capacité de correction e et corriger si possible les mots suivants : y_1=1011101, y_2=1110111, y_3=0010111.

Exercice 14. On considère un code de Hamming C(7,4).

a. Coder le message suivant : 010110010111
b. Décoder le message suivant : 010001110010101101001

Exercice 15. On considère le code linéaire en blocs défini par une matrice de contrôle

$$H = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

obtenue en rajoutant à la matrice de contrôle du code de Hamming (7,4,3) une colonne de zéros puis une ligne de uns.

1. Quelles sont la longueur *n* et la dimension *k* de ce code ?
2. A quoi correspond pratiquement la modification du code de Hamming ?
3. Mettre la matrice H sous forme systématique.
4. Trouver une matrice génératrice G de ce code.
5. Montrer que ce code détecte toutes les mots de deux erreurs et corrige toutes les configurations d'une erreur.

Exercice 16. Taille de paquets et taux de transfert (rendement)

L'objet de cet exercice est de comparer les taux de transmission et la fiabilité d'un code par répétition et un code de Hamming. Le but est de démontrer que dans le cas d'un canal bruité, émettre des paquets longs est plus efficace qu'émettre des paquets courts. On désire transmettre un message de 10000 bits à travers un canal bruité. On considère une probabilité d'erreur p= 0,01.

Codage par répétition : Chaque bit est émis trois fois. Le décodage se fait par un vote à la majorité.

1. Quel est le taux de transmission ?
2. Quelle est la probabilité que le décodage soit incorrect ?
3. Combien des 10000 bits du message ne sont pas correctement transmis ?

Paquets de 9 bits : On considère un code Hamming(9,3). Le message est envoyé sous forme de paquets de 9 bits, de la forme (s1, s2, s3, t1, t2, t3, t4, t5, t6). Les trois premiers bits s_1,s_2, s_3 constituent le message original, les six suivants t_1, ... , t_6 sont les bits de contrôle.

4. Quel est le taux de transmission ?
5. Combien y a-t-il de configuration possible de 0 , 1 , ou 2 erreurs dans un tel paquet de 9 bits
6. Supposons qu'il existe un codage tel que les 6 bits de contrôle puissent localiser toutes les configurations jusqu'à deux erreurs. Quelle est alors la probabilité qu'un tel paquet de 9 bits ne soit pas décodé correctement ?
7. Combien des 10000 bits du message ne sont pas transmis correctement ?

Exercice 17. On considère l'ensemble C définie par :

C=$\{(2x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ 2x_1+x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_2,\ 2x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_2)/\ x_i \in \mathrm{F}_3\ \}$

1. Montrer que C est un code linéaire dont on détermine une base, sa longueur n et sa dimension k.
2. Donner une matrice génératrice G et déduire que C n'est pas systématique.
3. Soit C_s l'image de C par la transposition τ_{23}. Montrer que C_s est un code systématique dont on détermine sa matrice génératrice normalisée G_N et une matrice de contrôle H_N.
4. Construire le code C_s et déduire sa distance d et sa capacité de correction e.
5. Décoder si possible les mots y_1=0012102, y_2=121211.
6. Bob a envoyé un message $m=m_1m_2$ à Alice qui possède comme clés secrètes les matrices G_N, S=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et P=σ(I_7) tel que la permutation $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.
   a. Déduire la clé publique (G', e) que Bob a utilisé pour chiffrer m. Quel est le mot c envoyé à Alice ?
   b. Soit c=022211 un message reçu par Alice. Quel est le message clair *m* que Bob a envoyé à Alice ?

Exercice 18. Construire le code de Reed-Muller *RM*(2, 3) de matrice génératrice *G*(2, 3).

Exercice 19. Si q=5, construire le code de Hamming 5-aire pour m=2.