

Partie 2 du chapitre I

On avait vu que les propositions complexes sont composées de propositions atomiques, par exemple P : «le soleil brille **et** le vent souffle », où les propositions élémentaires sont liées par le « **et** », qu'on appelle « connecteur logique ».

• Connecteurs logiques الروابط المنطقية

Ils existent cinq (5) connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique. Soient P et Q deux assertions (propositions).

1. La négation « $\neg$ » ou bien « $\neg$ » النفي (connecteur unaire)

Nous appellerons la négation de P , et qui sera notée $\bar{P}$ (ou bien $\neg P$), la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, et fausse lorsque P est vraie.

Table de vérité de la négation

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

Par exemple, la négation de « Jijel est située à l'est de l'Algérie » est « Jijel n'est pas située à l'est de l'Algérie ».

. Si P est la proposition « $5 = 0$ », non P est la proposition « $x \neq 0$ ».

. Si P est la proposition « Le 05 est pair », donc non P est la proposition « 05 n'est pas pair ».

Attention,

la négation de « Cette table est blanche » est, non pas « cette table est noire », mais tout simplement

« cette table n'est pas blanche ».

. Le contraire de la phrase « f est la fonction nulle » est, non pas « f ne s'annule pas », mais

« f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point ».

. Le contraire de la phrase « $x \geq 0$ » est « $x < 0$ », et non pas « $x \leq 0$ ».

- $\neg(x < y) \Leftrightarrow x \geq y$
- $\neg(x > y) \Leftrightarrow x \leq y$
- $\neg(x \geq y) \Leftrightarrow x < y$
- $\neg(x \leq y) \Leftrightarrow x > y$
- $\neg(x = y) \Leftrightarrow x \neq y$

• Négation de la négation:

En général, dans le dialecte, une double négation vient souvent renforcer la négation tel que : voulez-vous sortir ? non, non.

Par contre, en mathématique, une double négation est considérée comme une affirmation.

$$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$$

Preuve. Dans la table de vérité on peut voir que $\neg(\neg P)$ et P ont les mêmes valeurs de vérité

P	$\bar{P}$	$\bar{\bar{P}}$
1	0	1
0	1	0

2. Conjonction « et » ou « $\wedge$ » الوصل

On appelle la conjonction des deux propositions P, Q qu'on note par $P \wedge Q$, et qu'on lit « P et Q », la proposition qui ne soit vraie que lorsque P et Q sont simultanément (les deux au même temps) vraies.

Par exemple,

P : « L'herbe est verte » (vraie) et Q : « Le ciel est bleu » (vraie).

$P \wedge Q$ se lit donc « L'herbe est verte **et** le ciel est bleu » ($P \wedge Q$ est vraie).

« $2 < 4$ et $5 > 4$ » (on l'écrit souvent « $2 < 4 < 5$ »)

P	Q	$P \wedge Q$
-----	-----	--------------

1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- $P \wedge Q$ est fausse lorsque l'une au moins des deux assertions est fausse.
Ainsi « L'herbe est vert **et** le ciel est vert » est une assertion fausse.

Théorème. (la preuve par table de vérité)

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$

$$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P) \quad (\text{la conjonction est commutative})$$

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \quad (\text{La conjonction est associative})$$

3. Disjonction « ou » ou « $\vee$ » الفصل

On appelle la disjonction des deux propositions P, Q qu'on note par $P \vee Q$, et qu'on lit « P ou Q » la proposition qui ne soit fausse que lorsque P et Q sont simultanément (les deux au même temps) fausses.

Par exemple,

« El Oued de Kessir passe par Jijel **ou** par Batna » (elle est vraie car la première proposition est vraie)

« $40 = 23 \times 2$ ou $7 = 3 \times 4$ » (elle est fausse car les deux sont fausses)

Remarque. En mathématiques, le « ou » est non-exclusif, c'est à dire qu'il comprend la possibilité que les deux propositions

Soient vraies. Ainsi, la proposition « $xy = 0$ » équivaut à la proposition « $x = 0$ ou $y = 0$ », elle est vraie quand l'un

des deux nombres est nul, elle est aussi vraie quand les deux sont nuls.

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Théorème. (preuve par table de vérité)

$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

$$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P) \quad (\text{la disjonction est commutative})$$

$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \quad (\text{la disjonction est associative})$$

Remarque. La conjonction est distributive sur la disjonction, et l'inverse aussi, autrement dit :

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

Preuve, par table de vérité.

• Lois de Morgan

$$\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

$$\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$$

Preuve (par la table de vérité)

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

- Les lois de **Morgan** permettent de transformer une conjonction en une disjonction (et réciproquement) via la négation. On peut se convaincre que tout énoncé peut s'écrire en utilisant uniquement la conjonction $\wedge$ et la négation $\neg$, ou par la disjonction $\vee$ et la négation $\neg$, (par exemple, au paragraphe suivant, on verra que la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est identique à la proposition $\{ \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P) \}$), un résultat import en **électronique** et en **informatique**.

4. Implication « $\Rightarrow$ » استلزام

On appelle implication, et on la note par « $P \Rightarrow Q$ » la proposition définie de différentes façons par :

- Si P alors Q,
- Pour que P il faut Q,
- Pour que Q il suffit P,
- P est une condition suffisante pour Q,
- Q est une condition nécessaire de P.

P s'appelle alors l'hypothèse et Q la conclusion.

Par exemple,

« $3 > 2 \Rightarrow 3^2 = 9$ » « $3 > 2 \Rightarrow 3^2 = 10$ » « $1 > 2 \Rightarrow 3^2 = 10$ »

« Jijel est une ville côtière $\Rightarrow$ l'Algérie est un pays Africain. »

- Table de vérité de l'implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Remarquons que $P \Rightarrow Q$ soit fausse dans un seul cas, le cas où P est vraie et Q est fausse.

Théorème. (preuve par table de vérité)

$(P \Rightarrow Q)$ correspond à $(\bar{P} \vee Q)$.

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Par exemple,

P : « $2 < 0$ » et Q : « $-1 > 0$ » sont deux assertions fausses, donc $P \Rightarrow Q$ est vraie,

« Si $x \in \{5, 6, 9\}$ alors $x \leq 9$ » est une assertion vraie.

Théorème (Transitivité de l'implication). Soient P, Q et R trois propositions logiques, on a :

$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

Preuve par table de vérité.

- L'implication « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la réciproque de l'implication (عكس الاستلزام) « $P \Rightarrow Q$ ».
- L'implication « $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ » s'appelle la contraposée de l'implication (عكس نقیض الاستلزام)