Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes
et Informatique
Département de d'informatiqye

Master E.D.P. et applications
Inégalités Variationnelles

Travaux dirigés

Exercice 1: Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soient C_1 et C_2 deux partie convexes de E et soit $s \in [0,1]$. Montrer que l'ensemble $C = sC_1 + (1-s)C_2$ est convexe.

2. Soit C un sous ensemble convexe de E.

   (a) Montrer que pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$ on a $\lambda C + \mu C \subset (\lambda + \mu)C$.

   (b) Supposons que $0 \in C$. Montrer que $\lambda C \subset \mu C$ pour $0 \leq \lambda \leq \mu$.

3. Soit C un sous ensemble convexe de E. Montrer que pour tout $x \in C$ et tout $y \in Int(C)$, on a
$$tx + (1-t)y \in Int(C), \quad \forall t \in [0,1].$$

Exercice 2: Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions convexes définies d'un espace vectoriel normé E dans $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la fonction g de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ par $g(x) = (\sup f_i)(x) = \sup\limits_{i \in I} f_i(x)$.

1. Montrer que $\text{epi}(g) = \cap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$.

2. En déduire que g est convexe.

Exercice 3 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

1. Soient $f : E \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f convexe et g convexe croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

2. Montrer que si $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe et $A : F \to E$ un opérateur linéaire alors $f \circ A$ est convexe.

3. Montrer que $f(x,y) = \Big(|2x+3y| + |x-y|\Big)^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Soient E et U deux espaces vectoriels normés et soit $F : E \times U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On définit la fonction $p(u) = \inf\limits_{x \in E} F(x,u)$. Montrer que p est convexe.

Exercice 5:

1. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes. Exprimer le sous différentiel de la fonction $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par $G(x,y) = f(x) + g(y)$ en fonction des sous différntiel de f et g.

2. soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(x,y) = |x| + \max(y, \frac{y^2}{2}).$$
   (a) Montrer que h est une fonction convexe.
   (b) Calculer le sous différentiel de h au point $(0,1)$.
   (c) Monter que $(1,1) \in \partial h((0,1))$ est un sous gradient.
   (d) $(0,1)$ est-il un point critique de h.

Exercice 6: On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe, on suppose que x^* est l'unique minimiseur de f, c'est à dire,
$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
Pour une suite $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{+*}$, on introduit l'algorithme suivant : soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et pour $k \in \mathbb{N}$:

- si $0 \notin \partial f(x_k)$, on pose
$$x_{k+1} = x_k - \tau_k \frac{p_k}{\|p_k\|}, \;\; avec\ p_k \in \partial f(x_k),$$
- si $0 \in \partial f(x_k)$ l'algorithme s'arrête.

on note $r_k = \|x_k - x^*\|$

1. Etablir un expression de r_{k+1}^2 en fonction de r_k, p_k et τ_k.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$\langle p_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k).$$
3. En utilisant le faite que x^* est l'unique minimiseur, déduire que $\langle p_k, x^* - x_k \rangle \leq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} r_{k+1}^2 \leq r_0^2 + \sum_{k=0}^{n} \tau_k^2.$$
5. Déduire des questions précédentes une condition suffisante sur la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \tau_k^2$ pour que la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Exercice 7 : Soit l'ensemble
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\, x + y \leq 1, x > 0,\ y > 0\}.$$

1. Montrer que S est convexe puis déterminer $N_S((0,0))$.
2. Représenter graphiquement l'ensemble S et son cône normal au point $(0,0)$.