Chapitre 1

Géométrie affine

1.1 Espaces affines

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 1.1. *Un espace affine dirigé par E est un couple $(\mathcal{E}, \oplus)$ formé d'un ensemble $\mathcal{E}$ et d'une loi externe $\oplus$ qui a un couple $(A, \overrightarrow{u})$ de $\mathcal{E} \times E$ associe un élément $A \oplus \overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $A \in \mathcal{E}$: $A \oplus \overrightarrow{u} = A$.*
2. *Pour tout $A \in \mathcal{E}$ et tous $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v} \in E$:*

$$(A \oplus \overrightarrow{u}) \oplus \overrightarrow{v} = A \oplus (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$$

3. *Pour tout $A \in \mathcal{E}$, l'application $\overrightarrow{u} \mapsto A \oplus \overrightarrow{u}$ est bijective,i.e,. pour tous A, $B \in \mathcal{E}$ il existe un élément unique $\overrightarrow{u}$ dans E tel que $A \oplus \overrightarrow{u} = B$.*

Remarque 1.2.
1. *L'espace E est l'espace directeur de $\mathcal{E}$.*
2. *Les éléments de $\mathcal{E}$ sont des points et ceux de E des vecteurs.*
3. *Lorsque $\overrightarrow{u}$ est l'unique vecteur tel que $B = A \oplus \overrightarrow{u}$ on notera $\overrightarrow{u} = B - A = \overrightarrow{AB}$ donc $B = A \oplus \overrightarrow{AB}$.*
4. *Si E est de dimension n, on dit que $\mathcal{E}$ est de dimension n.*

Exemple 1.3. *Tout espace vectoriel est un espace affine dirigé par lui même. En effet, prenons $\mathcal{E} = E$ et définissons la loi externe $\oplus$ comme étant la loi interne de E. Il est* *clair que les trois propriétés de la Définition 1.1 sont satisfaites et donc E est espace affine.*

Exemple 1.4. *L'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un espace affine dirigé par $\mathbb{R}^2$. En effet, soit l'application définie par*

$$\begin{array}{ll} \oplus : \mathcal{E} \times E & \to \mathcal{E} \\ ((x, y), (a, b)) & \mapsto (x - a,\ y - b) \end{array}$$

vérifions que les trois propriétés de la Définition 1.1 sont satisfaites.

1. *Soit $(x, y) \in \mathcal{E}$ on a*

$$\begin{array}{rcl} (x, y) \oplus (0, 0) & = & (x - 0, y - 0) \\ & = & (x, y). \end{array}$$

Alors, $(x, y) \oplus (0, 0) = (x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$.

2. *Soit $(x, y) \in \mathcal{E}$ et soient (a, b), $(a', b') \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{array}{rcl} \Big[(x, y) \oplus (a, b)\Big] \oplus (a', b') & = & \Big(x - a, y - b\Big) \oplus (a', b') \\ & = & \Big(x - a - a', y - b - b'\Big) \\ & = & \Big(x - (a + a'), y - (b + b')\Big) \\ & = & (x, y) \oplus (a + a', b + b') \\ & = & (x, y) \oplus \Big[(a, b) + (a', b')\Big] \end{array}$$

Donc, pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}$ et tous (a, b), $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\Big[(x, y) \oplus (a, b)\Big] \oplus (a', b') = (x, y) \oplus \Big[(a, b) + (a', b')\Big].$$

3. *Soient $(x, y), (x', y') \in \mathcal{E}$:*

$$\begin{array}{rcl} (x, y) \oplus (a, b) = (x', y') & \Rightarrow & (x - a, y - b) = (x', y') \\ & = & \Big(x - a - a', y - b - b'\Big) \\ & \Rightarrow & x - a = x' \text{ et } y - b = y' \\ & \Rightarrow & a = x - x' \text{ et } b = y - y', \end{array}$$

ce qui montre que l'application $(a,b) \mapsto (x,y) \oplus (a,b)$ *est bijective pour tout* $(x,y) \in \mathcal{E}$.

Remarqons que toutes les conditions de la Définition 1.1 sont satisfaites et donc $\mathcal{E}$ *est espace affine rédigé par* E.

Proposition 1.5. *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine dirigé par* E. *Pour tous* A, B, $C \in \mathcal{E}$, *on a*

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow A = B$.
2. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$.
3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(Relation de Chasles).*
4. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. Voir le TD. ■

Proposition 1.6. *Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble non vide.* $\mathcal{E}$ *est un espace affine dirigé par* E *si et seulement il existe une application*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to E \\ (A,B) &\mapsto \psi(A,\, B) \end{aligned}$$

tel que

1. *Pour tous* A, B, $C \in \mathcal{E}$:

$$\psi(A,B) + \psi(B,C) = \psi(A,C).$$

2. *Pour tout* $A \in \mathcal{E}$, *l'application*

$$\begin{aligned} \psi_A : \mathcal{E} &\to E \\ B &\mapsto \psi_A(B) = \psi(A,\, B) \end{aligned}$$

est bijective de $\mapsto$ *dans* E.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et supposons qu'il existe une application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to E \\ (A,B) &\mapsto \psi(A,\, B) \end{aligned}$$

vérifiant $a)$ et $b)$ de la proposition et montrons que $mathcalE$ est un espace affine dirigé par E. Pour ce but, on définit, pour tout $A \in \mathcal{E}$ la loi extérieure

$$\begin{aligned} \oplus\, : \mathcal{E} \times E \quad &\to \mathcal{E} \\ (A, \overrightarrow{u}) \quad &\mapsto A \oplus \overrightarrow{u} = \psi_A^{-1}(\overrightarrow{u}) \end{aligned}$$

Vérifions en premier lieu que $\oplus$ est bien définie pour tout $(a, \overrightarrow{u}) \in \mathcal{E} \times E$. D'après l'hypothèse $b)$ l'application ψ_A est bijective de $\mathcal{E}$ dans E, et donc ψ_A^{-1} est bien définie comme application de E dans $\mathcal{E}$. Par conséquent, $\oplus$ a bien un sens pour tout $A \in \mathcal{E}$ et par suite, $\oplus$ définie bien une loi de composition externe associe à un couple $(A, \overrightarrow{u})$ de $\mathcal{E} \times E$ un élément de E. ■

Montrons maintenant que les trois conditions de la Définition 1.1 sont satisfaites.

1. Soit $A \in \mathcal{E}$, on a $A \oplus \overrightarrow{0} = \psi_A^{-1}(\overrightarrow{u})$. D'après l'hypothèse $b)$ de la proposition, il existe $B \in \mathcal{E}$ tel que $B = \psi_A^{-1}(\overrightarrow{0})$, d'où $\overrightarrow{0} = \psi_A(B)$. D'autre part, d'après l'hypothèse $a)$ on a
$$\psi(A, A) + \psi(A, A) = \psi(A, A),$$
donc $\psi(A, A) = \overrightarrow{0}$, d'où $\psi_A(A) = \overrightarrow{0}$ et par identification on trouve que $\psi_A(A) = \psi_A(B)$, en utilisant le fait que ψ_A est bijective, on trouve que $A = B$ et par suite, $A \oplus \overrightarrow{0} = A$.

2.