

Série 1

Exercice 1: Soit Ω un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^n à frontière assez régulière. Pour $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \left(\int_{\Omega} u dx \right) \left(\int_{\Omega} v dx \right).$$

1. Montrer que $a(\cdot, \cdot)$ est $H^1(\Omega)$ -elliptique (grâce à la définition de $a(\cdot, \cdot)$, ceci est équivalent à l'existence d'une constante $c > 0$ tel que

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \leq c a(v, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

2. En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ du problème

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Montrer qu'alors

$$\int_{\Omega} u dx = \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} f dx.$$

En particulier, si $\int_{\Omega} f dx = 0$, quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u ?

Exercice 2: Soit $I =]0, 1[\subset \mathbb{R}$. On pose

$$V = \left\{ v \in H^1(I) : v\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(I)$.
2. Montrer que $v \mapsto \|v'\|_{L^2(I)}$ est une norme sur V équivalente à la norme usuelle de $H^1(I)$.
3. Montrer que le problème variationnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_I u' v' dx = v(0) \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

admet une solution unique.

4. Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par u ? Est ce que $u \in H^2(I)$?

Exercice 3: Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 à frontière régulière et soit $f \in L^2(\Omega)$.

Première partie: On considère le problème variationnel suivant

$$(P_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \left(\int_{\Omega} u \, dx \right) \left(\int_{\Omega} v \, dx \right) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right.$$

où λ est un réel ≥ 1 . Nous admettons l'inégalité suivante.

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1 \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left| \int_{\Omega} v \, dx \right|^2 \right) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

pour une constante C_1 strictement positive.

1. Montrer que (P_λ) admet une solution unique qu'on notera u_λ et que cette solution vérifie

$$\|u_\lambda\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C_2 > 0$ est une constante indépendante de λ .

2. Montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$, indépendante de λ , tel que

$$\left| \int_{\Omega} u_\lambda \, dx \right| \leq \frac{C_3}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

3. Ecrire formellement le problème associé à (P_λ) .

4. En déduire que la solution de (P_λ) est dans $H^2(\Omega)$ et vérifie

$$\|u_\lambda\|_{H^2(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où $C_4 > 0$ est une constante indépendante de λ .

Deuxième partie: On pose

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v(x) \, dx = 0 \right\},$$

et on considère le problème suivant

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V. \end{array} \right.$$

1. Montrer que V est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$.

2. Montrer que (\mathcal{P}) admet une solution unique.

3. On suppose que $\int_{\Omega} f(x) \, dx = 0$. Montrer que pour tout $\lambda \geq 1$, la solution u_λ coïncide avec u .

4. On suppose maintenant que $\int_{\Omega} f(x) dx \neq 0$. Dans ce cas,

(a) Prouver que

$$\int_{\Omega} \nabla(u_{\lambda} - u) \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall v \in V.$$

(b) En déduire que

$$\lambda(u_{\lambda} - u) = \frac{1}{(\text{mes } \Omega)^2} \int_{\Omega} f(x) dx.$$

(c) En déduire que

$$\|u_{\lambda} - u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de λ .

Conclure.

Chargée du module : Pr. Wided Chikouche