Université de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques

Master 1 EDP et Applications
Introduction aux Méthodes d'Approximation Variationnelles

Série 2

<u>**Exercice 1**</u>: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ suffisamment régulière. On souhaite résoudre le problème elliptique suivant, avec conditions aux limites de type Robin (ou Fourier)

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma, \end{cases}$$

où $\alpha > 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma)$ sont donnés.

1. On suppose qu'il existe une solution $u \in H^2(\Omega)$ à ce problème. Montrer qu'alors u est solution du problème variationnel

   $$(2) \qquad a(u, v) = L(v), \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

   où

   $$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \alpha \int_\Gamma uv \, d\sigma,$$

   et

   $$L(v) = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Gamma gv \, d\sigma.$$

2. Montrer la continuité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire L.

3. Pour montrer la coercivité de a, nous allons d'abord montrer une inégalité de type Poincaré.
   Inégalité de Poincaré-Friedrichs : Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante $\beta > 0$ tel que

   $$(3) \qquad \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Gamma v^2 \, d\sigma \geq \beta \int_\Omega v^2 \, dx, \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

   On souhaite faire une démonstration par l'absurde de ce résultat :

   (a) Ecrire la négation de l'affirmation (3). En déduire qu'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $H^1(\Omega)$ tel que $\|v_n\|_{0,\Omega} = 1$ vérifiant

   $$\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx + \alpha \int_\Gamma v_n^2 \, d\sigma < \frac{1}{n}, \qquad \forall \, n \in \mathbb{N}^\star.$$

   (b) Montrer que (v_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$. Utiliser ensuite un résultat de compacité pour en déduire qu'on peut en extraire une sous-suite (v_{n_k}) qui converge dans $L^2(\Omega)$.

(c) Montrer que (v_{n_k}) converge dans $H^1(\Omega)$.

(d) Conclure en utilisant la continuité de l'application trace γ_0.

4. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ au problème (2) et que u est aussi solution de (1).

Exercice 2: Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ assez régulière et $\vec{b} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N$ un champ de vecteurs de convection tel que $\operatorname{div} \vec{b} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial b_i}{\partial x_i} \leq 0$ dans Ω.

On considère le problème aux limites suivant (appelé **problème de convection-diffusion**)

$$-\Delta u + \vec{b} \, . \, \nabla u = f \quad \text{dans } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

1. Etablir une formulation variationnelle pour ce problème et montrer qu'elle admet une solution unique.

   Indication : Pour montrer la coercivité de la forme bilinéaire associée, commencer par montrer que

$$\int_\Omega (\vec{b} \, . \, \nabla v) v \, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega v^2 \operatorname{div} \vec{b} \, dx \qquad \forall \, v \in H_0^1(\Omega).$$

2. Montrer que la solution variationnelle est solution du problème de convection-diffusion.

Chargée du module : Pr. Wided Chikouche