

TD n°2

Exercice 1 Soit la fonction en escalier f définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0, \\ +1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ +3 & \text{si } x = 1, \\ -2 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 4 & \text{si } 2 < x < 4, \end{cases}$$

1. Ecrire la subdivision d_1 de $[0, 4]$. Est-ce qu'elle est régulière? justifier la réponse.
2. Calculer $\int_0^4 f(x)dx$ pour la subdivision d_1 .
3. Pour 4 sous-intervalles, donner le pas et la subdivision régulière d_2 de l'intervalle $[0, 4]$.
4. Calculer $\int_0^4 f(x)dx$ pour la subdivision d_2 .

Exercice 2 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}E[x^2]) \forall x \in [0, 2]$; où $E[x^2]$ désigne la partie entière de x^2 , est en escalier sur $[0, 2]$ et calculer son intégrale.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par: $f(x) = 3x^2$ et la subdivision régulière d_n sur $[0, 1]$ telle que $d_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$.

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, d_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, d_n)$
2. Que peut-on conclure? Indication: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4 En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_a^b e^x dx, \quad I_2 = \int_1^2 x^2 dx$$

Exercice 5 En utilisant le tableau des primitives, calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}, \quad f_2(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{3}), \quad f_3(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad f_4(x) = 3x\sqrt{1+x^2},$$
$$f_5(x) = (3x-1)(3x^2-2x+3)^3, \quad f_6(x) = \frac{x}{1+x^4}, \quad f_7(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}, \quad f_8(x) = \frac{\arctan x}{1+x^2}.$$

Exercice 6 Calculer par changement de variable, les intégrales suivantes $I_1 = \int \frac{1}{3+e^{-x}} dx$,
 $I_2 = \int (\cos x)^{2025} \sin x dx$, $I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$, $I_4 = \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

Exercice 7 En utilisant l'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes: $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$,
 $I_2 = \int (\ln x)^2 dx$, $I_3 = \int \sin(\ln x) dx$, $I_4 = \int_0^1 \arctan x dx$, $I_5 = \int x \tan^2 x dx$.

Exercice 8

1. Montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

2. En déduire l'intégrale $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

Exercice 9 En utilisant les sommes de Riemann d'une fonction à déterminer, calculer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{3n^2-k^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}.$$

N - Fetouci