

الفصل الثاني: طرق حل البرامج الخطية

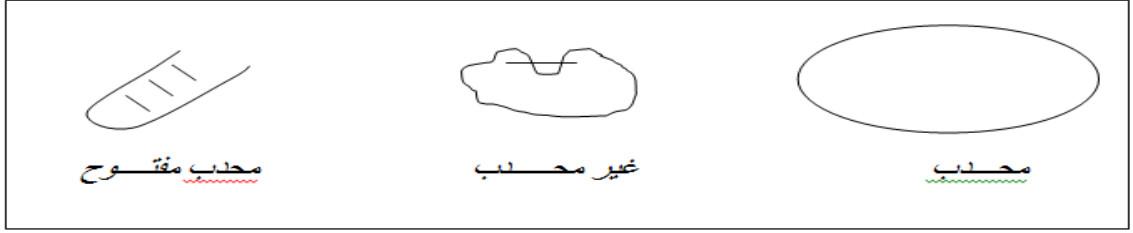
في هذا الفصل نتطرق إلى طرق حل البرامج الخطية على اختلافها، حيث يمكننا حل المسائل المصاغة في صورة نموذج برمجة خطية بالطرق التالية: الطريقة البيانية، طريقة السمبلكس العادي، طريقة السمبلكس على مرحلتين، وتعتبر الطريقة البيانية مهمة لفهم طريقة السمبلكس بنوعيه، ونختتم في الأخير ببعض الحالات غير العادية للبرمجة الخطية.

1.2 مفاهيم وتعريف

تعريف 1.1: (التحدب)

نقول عن منطقة (S) أنها محدبة (Convex) إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall a, b \in (S): [a, b] \subset (S) \Leftrightarrow (S) \text{ منطقة محدبة}$$

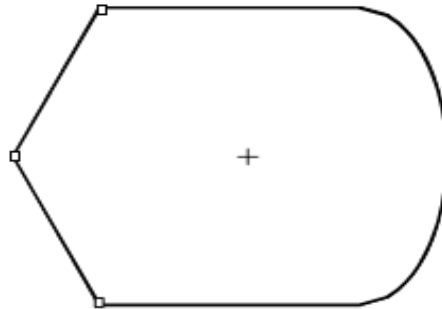


الشكل 1.2

تعريف 2.1: (النقاط الحدية)

تكون النقطة x في مجموعة محدبة $C \in \mathbb{R}$ نقطة حدية لـ C إذا كان:

$$\forall x_1, x_2 \in C; \lambda \in [0,1] : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \Rightarrow x = x_1 = x_2$$



الشكل: 2.2

□ نقطة حدية
+ نقطة غير حدية

إذا كانت دالة الهدف f دالة حقيقية مستمرة على المجموعة المتراسة D المحتواة في $\mathbb{R}^n$ (بمعنى مغلقة ومحدودة) فإن البرنامج الخطي يقبل على الأقل حل إجمالي نرمز له بـ x^* من D .

(الأمثلة)

نظرية 4.1 [1]:

إذا كان z يقبل تعظيما (تصغيرا) على (S) فإن الحل الأمثل يكون عند النقاط الحدية (القيم) لـ (S) .

2.2 الطريقة البيانية (Graphical method)

رغم بساطتها تعتبر الطريقة البيانية وسيلة سهلة وسريعة لحل مشاكل البرمجة الخطية ذات متغيرين أو ثلاثة كحد أقصى بسبب تعذر رسم أكثر من ثلاثة أبعاد هندسية على الورق، حيث يتم تمثيل دالة الهدف والقيود ثم إيجاد منطقة الحل الأمثل.

(النقطة الحدية)

نظرية 5.1 [1]:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} OPT(z = \sum_{j=1}^n c_j x_j), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq = \geq) b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل موجودا عند متعدد الوجوه من هذه المنطقة، أما إذا كانت هذه المنطقة غير محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) عند نقطة حدية من هذه المنطقة.

1.2.2 مبدأ عمل الطريقة البيانية

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max (Min)} Z = c_1 x_1 + c_2 x_2, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq (\geq) b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq (\geq) b_2, \end{cases}$$

لحل هذا البرنامج باستخدام الطريقة البيانية نعتمد على تحديد منطقة الحلول وذلك باتتباع الخطوات التالية:

- صياغة المشكل في شكل رياضي.
- رسم محاور الإحداثيات المقابلة لمتغيرات المشكلة.
- التمثيل البياني لجميع القيود، وتحديد منطقة الحلول المسموح بها.
- تمثيل دالة الهدف في مجال الإحداثيات.
- استخراج الحل الأمثل (إن وجد) باستعمال انسحابات للخط المستقيم الممثل لدالة الهدف بالاتجاه الذي يمثل القيمة المثلى.

2.2.2 تطبيقات حول إيجاد الحلول المثلى لبرنامج خطي (PL)

لإيجاد عدد الحلول المثلى ونوعها نأخذ كل حالة على شكل مثال لكي تتضح الأمور للقارئ:

• الحل عبارة عن نقطة واحدة

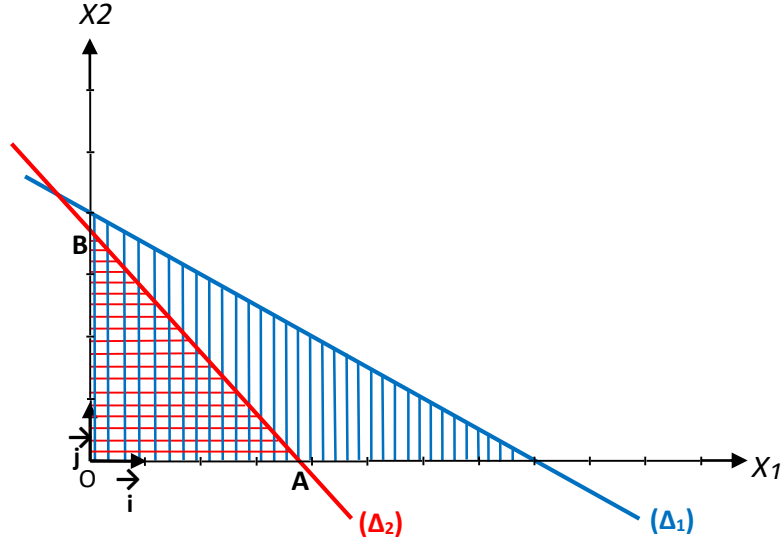
مثال 1.2: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + x_2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

لدينا: $(\Delta_1) : x_1 + 2x_2 = 40, (\Delta_2) : x_1 + x_2 = 18$

نرسم المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

	(Δ_1)		(Δ_2)	
x_1	0	40	0	18
x_2	20	0	18	0



الشكل 3.2

الحل الأمثل موجود على قمم المثلث OAB حيث:

$$O = (0,0), A = (18,0), B = (0,18).$$

نعوض إحداثيات رؤوس المثلث OAB في دالة الهدف نجد:

$$z_O = 0, \quad z_A = 36, \quad z_B = 18$$

$$\text{Max}\{z_O, z_A, z_B\} = 36$$

إذن الحل الأمثل هو: $x^* = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \end{pmatrix}$ وقيمة دالة الهدف هي: $z^* = z_A = 36$.

• الحل عبارة عن توليفة

مثال 2.2: ليكن البرنامج الخطي التالي:

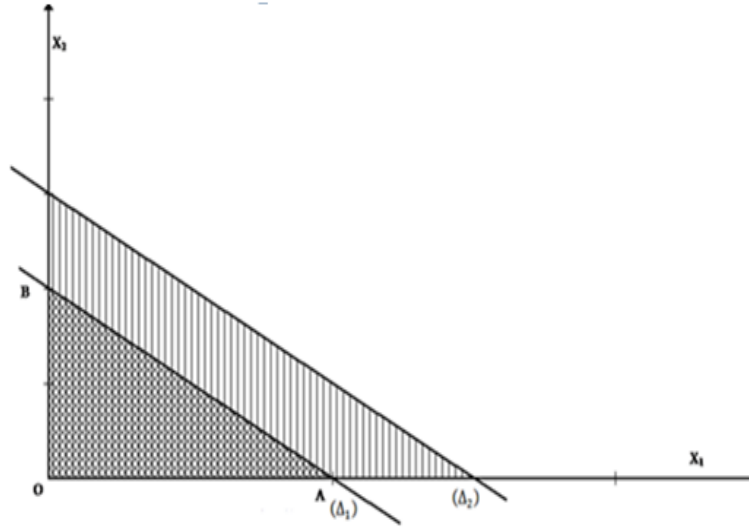
$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = 8x_1 + 4x_2, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$(\Delta_1) : 4x_1 + 2x_2 = 8 \quad \text{لدينا:}$$

$$(\Delta_2) : 2x_1 + x_2 = 6$$

نرسم المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

		(Δ_1)	(Δ_2)	
x_1	0	2	0	3
x_2	4	0	6	0



الشكل: 4.2

الحل الأمثل موجود على قمم المثلث OAB حيث

$$O = (0,0), \quad A = (2,0), \quad B = (0,4)$$

نعوض إحداثيات رؤوس المثلث OAB في دالة الهدف نجد:

$$z_O = 0, \quad z_A = 16, \quad z_B = 16$$

$$\text{Max} \{z_O, z_A, z_B\} = 16$$

$$z^* = z_A = z_B = 16 \quad \text{إذن:}$$

أي نقطة من نقاط القطعة المستقيمة $[A B]$ هي حل أمثل وهذا يعني أن هناك مالا نهائية من الحلول المثلى و تدعى هذه الحلول بالتوليفة أو الحلول المثلى البديلة.

• الحل موجود في منطقة مفتوحة

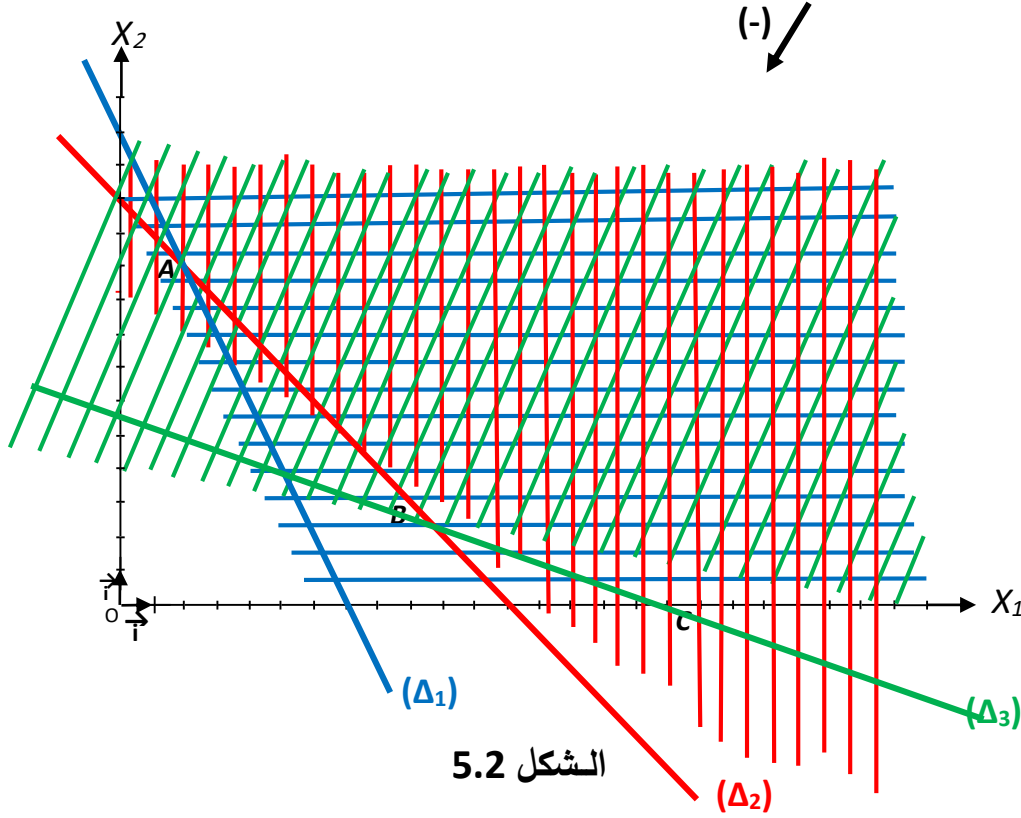
مثال 3.2: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Min } z = 2x_1 + 4x_2, \\ 2x_1 + x_2 \geq 14, \\ x_1 + x_2 \geq 12, \\ x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{لدينا: } (\Delta_1) : 2x_1 + x_2 = 14, (\Delta_2) : x_1 + x_2 = 12, (\Delta_3) : x_1 + 3x_2 = 18$$

نرسم المستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) و (Δ_3)

	(Δ_1)		(Δ_2)		(Δ_3)	
x_1	0	7	0	12	0	18
x_2	14	0	12	0	6	0



الحل الأمثل موجود في المنطقة المفتوحة x_2ABCx_1 حيث:

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B), \quad C = (18, 0)$$

البحث عن إحداثيات النقطتين A و B :

A عبارة عن تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) ، أي لإيجاد إحداثيات النقطة A نحل الجملة:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 & (1) \\ x_1 + x_2 = 12 & (2) \end{cases}$$

ب طرح المعادلتين نجد: $x_1 = 2$ وبتعويض x_1 في (2) نجد: $x_2 = 10$

$$A = (2, 10) \quad \text{ومنه:}$$

بنفس الطريقة فإن B عبارة عن تقاطع المستقيمين (Δ_2) و (Δ_3) وعليه نحل الجملة:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 12 & (1) \\ x_1 + 3x_2 = 18 & (2) \end{cases}$$

ب طرح المعادلتين نجد: $x_2 = 3$ وبتعويض x_2 في (1) نجد: $x_1 = 9$

ومنه: $B = (9,3)$

إذن: $z_A = 44$, $z_B = 30$, $z_C = 36$

$$\text{Min} \{z_A, z_B, z_C\} = 30$$

إذن الحل الأمثل هو: $x^* = (9,3)^t$ وقيمة دالة الهدف هي: $z^* = z_B = 30$.

• الحل غير موجود لاستحالة حصر دالة الهدف

مثال 4.2: ليكن البرنامج الخطي التالي:

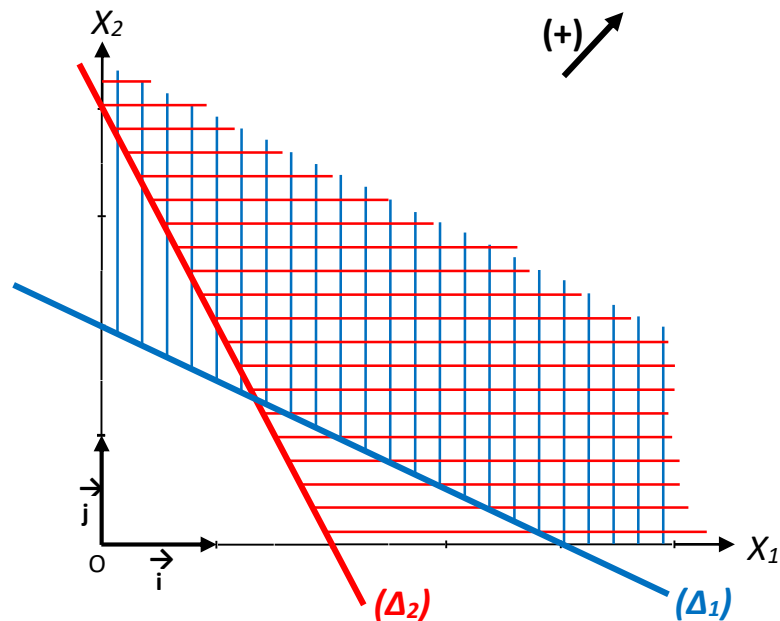
$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = -x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

لدينا: $(\Delta_1) : x_1 + 2x_2 = 4$

$$(\Delta_2) : 4x_1 + 2x_2 = 8$$

نرسم المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

	(Δ_1)		(Δ_2)	
x_1	0	4	0	2
x_2	2	0	4	0



الشكل 6. 2

لدينا هنا دالة الهدف الغاية منها هي التعظيم والمنطقة غير محدودة من الأعلى وهذا يعني أنه بإمكاننا جعل الدالة كبيرة بالقدر الذي نشاء وهذا غير منطقي ومنه لا توجد حلول.

• **الحل غير موجود لاستحالة تحقق القيود في آن واحد**

مثال 5.2: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = 2x_1 + 5x_2, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 40, \\ 3x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

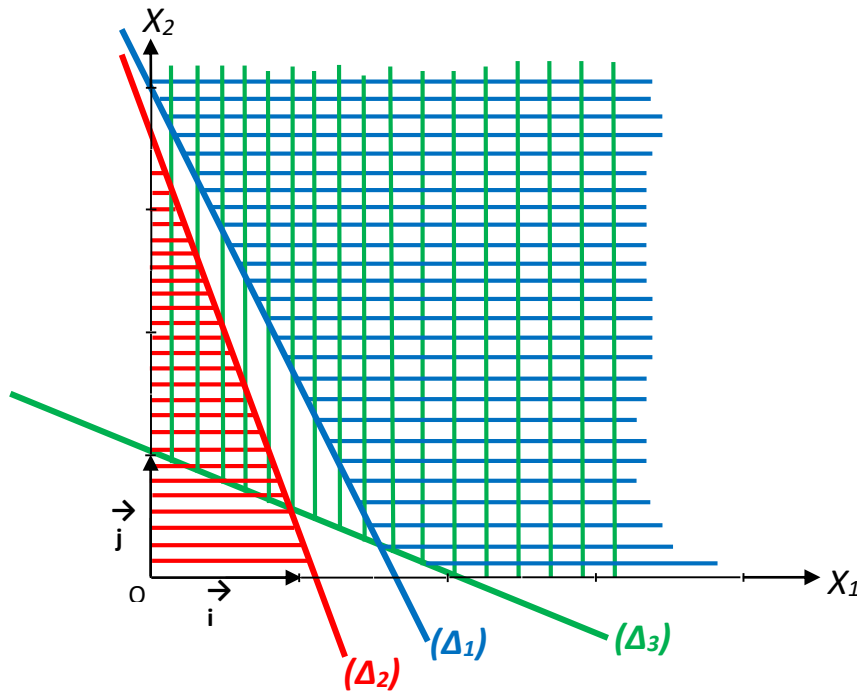
لدينا: $(\Delta_1) : 5x_1 + 2x_2 = 40$

$(\Delta_2) : 3x_1 + x_2 = 18$

$(\Delta_3) : x_1 + 2x_2 = 10$

نرسم المستقيمات $(\Delta_3), (\Delta_2), (\Delta_1)$

	(Δ_1)		(Δ_2)		(Δ_3)	
x_1	0	8	0	6	0	10
x_2	20	0	18	0	5	0



الشكل 7.2

لا توجد منطقة مشتركة بين القيود وعليه فإن هذه المسألة لا تملك حلول، إذن لا يوجد حل لهذه المسألة.

ملاحظة 6.2: أحيانا عندما يكون لدينا ثلاثة متغيرات وهناك قيد مساواة نستطيع الحل بيانيا.

3.2 طريقة السمبلكس (Simplex Method)

حتى الآن كانت دراستنا مقتصرة على الحل الهندسي للبرنامج الخطي ومن الواضح أن هذه الطريقة محدودة بالمسائل البسيطة حيث عدد المتغيرات لا يتعدى ثلاثة [1]، في حين أن أغلب المشاكل التي تواجه متخذي القرار التي تنمذج على شكل برامج خطية تتعامل مع عدد كبير من المتغيرات وهذا ما سمح بظهور طريقة تتميز بقدر كبير من الدقة والفعالية في الوصول إلى الحل الأمثل باستعمال قدر كاف من المتغيرات وهي معروفة باسم "طريقة السمبلكس"، التي قدمها العالم الرياضي الأمريكي "جورج دانزينغ" عام 1947م [2]، والتي لاقت رواجاً كبيراً منذ عام 1951م، نظراً لكونها طريقة لا يتحتم فيها حساب جميع الحلول الممكنة وإنما تعمل على الانتقال من حل إلى حل أفضل حتى يتم الحصول على الحل الأمثل، كما أنها تشير إلى نوعية الحلول فيما إذا كانت المسألة بدون حل أمثل أو أن لها عدة حلول مثلى.

1.3.2 طريقة السمبلكس العادي

تعريف 1.3:

نسمي برنامجاً خطياً قانونياً كل برنامج من الشكل:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j & / c_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & / b_i \in \mathbb{R}, a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

حيث x_j هي متغيرات القرار.

تعريف 2.3: (الحل الأمثل)

نقول عن حل أنه أمثل إذا كان مقبولا ويحسن دالة الهدف.

نظرية 3.3 [12]: (شرط الأمثلية)

إذا كانت معاملات دالة الهدف كلها سالبة أو معدومة أي: $c_j \leq 0$ ، فإن الحل الناتج هو حل أمثلي.

نظرية 4.3 [12]: (وحدانية الحل)

إذا كان $c_j < 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأمثل يكون حينئذ وحيداً.

ملاحظة 5.3:

إذا كان $c_j \leq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية ووجد $c_k = 0$ لأحد هذه المتغيرات فإنه يوجد عدد لانهائي من الحلول المثلى.

سنوضح في الخوارزمية الآتية كيفية التحكم في اختيار المتغير الداخل إلى الأساس والذي سينقلنا من حل أساسي مسموح به إلى حل آخر حتى الوصول للحل الأمثل.

• خوارزمية السمبلكس العادي (Ordinary Simplex Algorithm)

لإيجاد الحل الأمثل للبرامج الخطية ذات الشكل القانوني نقوم بتكرار منتظم لعدد من الخطوات حتى نتحصل على معاملات دالة الهدف كلها سالبة أو معدومة أي: $c_j \leq 0, j = \overline{1, n}$.

الخطوة الأولى: كتابة البرنامج الخطي على الشكل المعياري

أي تحويل جميع المترجمات في البرنامج الخطي إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات الفرق e_i والتي تمثل الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^n$.

فيصبح البرنامج الخطي على الشكل التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + e_i = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ e_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \quad x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

الخطوة الثانية: إنشاء الجدول الابتدائي T_0

T_0	x_1	x_2	.	.	.	x_n	e_1	e_2	.	.	.	e_n	b_i
e_1	a_{11}	a_{12}	.	.	.	a_{1m}	1	0	.	.	.	0	b_1
e_2	a_{21}	a_{22}	.	.	.	a_{2m}	0	1	.	.	.	0	b_2
.	.	.				.	.	.				.	.
.	.	.				.	.	.				.	.
.	.	.				.	.	.				.	.
e_m	a_{m1}	a_{m2}	.	.	.	a_{mn}	0	0	.	.	.	1	b_m
$-Z$	c_1	c_2	.	.	.	c_n	0	0	.	.	.	0	0

الخطوة الثالثة: البحث عن المرتكز

- عمود المرتكز: هو العمود k الذي يحقق: $c_k = \text{Max} \{c_j, j = \overline{1, n}\}$
 - سطر المرتكز: هو السطر s الذي يحقق: $\frac{b_s}{a_{sk}} = \text{Min} \{b_i/a_{ik}, a_{ik} \geq 0, i = \overline{1, m}\}$
- إذن المرتكز هو a_{sk} .

الخطوة الرابعة: نعد جميع الأعداد في عمود المرتكز باستعمال طريقة غوص (ماعد سطر المرتكز)

$$\forall i = \overline{1, m+1}, \quad i \neq s \quad : \quad l'_i = l_i - \left(\frac{a_{ik}}{a_{sk}}\right)l_s$$

الخطوة الخامسة: نقسم سطر المرتكز على المرتكز $l'_s = \frac{l_s}{a_{sk}}$.

الخطوة السادسة: ندخل المتغير الأساسي x_k أو متغير الفرق e_k مكان متغير الفرق e_s أو المتغير الأساسي x_s .

الخطوة السابعة: نحصل على الجدول T_1 ، ونميز فيه حالتين:

- الحالة 1: إذا حصلنا على معاملات تابع الهدف كلها سالبة أو معدومة فإن T_1 هو الجدول المثالي.
- الحالة 2: إذا وجد على الأقل معامل لتابع الهدف موجب تماماً نكرر العمليات من الخطوة الثالثة إلى الخطوة السادسة على الجدول T_1 حتى نحصل على الجدول المثالي T^* .

ملاحظة 8.3:

قراءة الحل من الجدول T^* تكون كالتالي: كل متغير في الأساس له قيمة تقابله في العمود B^* .

ملاحظة 9.3:

في حالة ما إذا تحصلنا على بعض معاملات الهدف (أو كلها) متساوية فإن عمود المرتكز هو العمود الموافق لأكبر قيمة موجبة من اليسار إلى اليمين، أما في حالة تساوي بعض أو كل القيم $\frac{b_i}{a_{ik}}$ فسطر المرتكز هو السطر الموافق لأصغر قيمة من الأعلى إلى الأسفل.

مثال 10.3:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } (z = 6x_1 + 11/2 x_2 + 7x_3 + 8x_4), \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 70, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12x_4 \leq 120, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

ندخل متغيرات الفرق:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } (Z = 6x_1 + 11/2 x_2 + 7x_3 + 8x_4), \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + e_1 = 70, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12x_4 + e_2 = 120, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + e_3 = 15, \\ e_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

نشكل الجدول الابتدائي T_0 :

T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	3	2	4	3	1	0	0	70
e_2	7	8	10	12	0	1	0	120
e_3	1	1	1	1	0	0	1	15
$-Z$	6	11/2	7	8	0	0	0	0

نبحث عن عمود المرتكز: هو

$$\text{Max } (6, 11/2, 7, 8) = 8$$

نبحث عن سطر المرتكز: هو

$$\text{Min } (70/3, 120/12, 15) = 120/12 = 10$$

ومنه المرتكز هو: $a_{24} = 12$

نقوم بقسمة السطر المرتكز على المرتكز $a_{24} = 12$.

T_0	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	3	2	4	3	1	0	0	70
e_2	7/12	2/3	5/6	1	0	1/12	0	10
e_3	1	1	1	1	0	0	1	15
$-Z$	6	11/2	7	8	0	0	0	0

نقوم بعدم عناصر العمود المرتكز

$$l'_1 = l_1 - 3l_2, \quad l'_3 = l_3 - l_2, \quad l'_4 = l_4 - 8l_2$$

ومنه الجدول T_1 :

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	5/4	0	3/2	0	1	-1/4	0	40
x_4	7/12	2/3	5/6	1	0	1/12	0	10
e_3	5/12	1/3	1/6	0	0	-1/12	1	5
$-Z$	4/3	1/6	1/3	0	0	-2/3	0	-80

نلاحظ أن معاملات تابع الهدف ليست كلها معدومة أو سالبة.

نبحث عن عمود المرتكز

$$\text{Max} (4/3, 1/6, 1/3, 0) = 4/3$$

نبحث عن سطر المرتكز

$$\text{Min} (32, 17.14, 12) = 12$$

ومنه المرتكز هو: $a_{31} = 5/12$

بقسمة السطر المرتكز على $a_{31} = 5/12$ نجد:

T_1	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	5/4	0	3/2	0	1	-1/4	0	40
x_4	7/12	2/3	5/6	1	0	1/12	0	10
x_1	1	4/5	2/5	0	0	-1/5	12/5	12
$-Z$	4/3	1/6	1/3	0	0	-2/3	0	-80

نقوم بعدم عناصر العمود المرتكز

$$l'_1 = l_1 - 5/4l_3, \quad l'_2 = l_2 - 7/12l_3, \quad l'_4 = l_4 - 4/3l_3$$

T^*	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	-1	1	0	1	0	-3	25
x_4	0	1/5	3/5	1	0	1/5	-7/5	3
x_1	1	4/5	2/5	0	0	-1/5	12/5	12
$-Z$	0	-9/10	-1/5	0	0	-2/5	-16/5	-96

نلاحظ أن معاملات تابع الهدف كلها معدومة أو سالبة ومنه الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 12, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 3, e_1 = 25, e_2 = 0, e_3 = 0$$

$$z^* = 96, \quad x^{*t} = (12, 0, 0, 3)$$

ملاحظة 11.3:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي وعناصر أساسه المثالي يمكننا إيجاد الحل الأمثل باستعمال طريقة غوص دون اللجوء إلى طريقة السمبلكس.

المثال التالي يوضح مدى أهمية الملاحظة 11.3.

مثال 12.3:

ليكن البرنامج الخطي المرفق بالجدول الابتدائي:

T_0	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	4	2	1	1	0	0	1200
e_2	2	3	2	0	1	0	900
e_3	5	4	1	0	0	1	600
$-Z$	150	250	100	0	0	0	0

• أكمل الجدول المثالي التالي:

T_1^*	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1							720
x_3							360
x_2							60
$-Z$							-51000

إكمال الجدول يكون باستعمال طريقة غوص على النحو التالي:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 5 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 150 & 250 & 100 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right| \begin{array}{l}
 l'_1 = l_1 - \frac{1}{2}l_2 \\
 l'_2 = l_2 - \frac{1}{2}l_2 \\
 l'_3 = l_3 - \frac{1}{2}l_2 \\
 l'_4 = l_4 - 50l_2
 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 1.5 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 & 0 \\
 2.5 & 1.5 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\
 -0.5 & 2.5 & 0 & 0 & -0.5 & 1 \\
 -100 & 100 & 0 & 0 & -50 & 0
 \end{array} \right|
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 l'_1 = l_1 - 5l_2 \\
 l'_2 = l_2 - \frac{3l_3}{5} \\
 l'_3 = \frac{2}{5}l_3 \\
 l'_4 = l_4 - 40l_2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{ccc|ccc}
 1.6 & 0 & 0 & 1 & -0.4 & -0.2 \\
 2.8 & 0 & 1 & 0 & 0.8 & -0.6 \\
 -0.2 & 1 & 0 & 0 & -0.2 & 0.4 \\
 -80 & 0 & 0 & 0 & -30 & -40
 \end{array} \right|$$

ومنه الجدول النهائي هو:

T^*	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	8/5	0	0	1	-2/5	-1/5	720
x_3	14/5	0	1	0	4/5	-3/5	360
x_2	-1/5	1	0	0	-1/5	2/5	60
-Z	-80	0	0	0	-30	-40	-51000

2.3.2 طريقة السمبلكس على مرحلتين (The two-phases Simplex Method)

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد الحل الأمثل للبرامج الخطية ذات الصيغة المختلطة سواء كانت دالة الهدف تعظيماً أو تصغيراً، وهي تعتمد بالدرجة الأولى على إدخال دالة هدف وهمية (اصطناعية) ومتغيرات اصطناعية تساعد على الوصول إلى حل أولي للمسألة الأصلية [5]. حيث تعمل دالة الهدف الاصطناعية على إخراج المتغيرات الاصطناعية من الأساس.

• خوارزمية السمبلكس على مرحلتين

نعتبر البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \\ Ax \leq, =, \geq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

حيث: $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ مصفوفة ذات m سطر و n عمود و لا يشترط أن تكون مصفوفة مربعة

$b = (b_i)_{1 \leq i \leq m}$ عبارة عن مصفوفة عمودية أو شعاع عمود من m مركبة.

$x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ مصفوفة عمودية أي شعاع عمود من n مركبة.

نرفق هذا البرنامج في شكله المعياري ببرنامج آخر كما يلي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Min } \psi = \sum_{j=1}^k v_j, \\ Ax + NE + Mv = b, \\ z - \sum_{j=1}^n c_j x_j = 0, \\ x, v, E \geq 0. \end{cases}$$

حيث: M و N عبارة عن مصفوفتين من الرتبة k و m .

$v = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ الناتجة من المتراحة أكبر أو يساوي $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ عبارة

عن أشعة مع $(k < n)$ ، حيث k يمثل عدد المتغيرات الوهمية التي تم إدخالها.

لتطبيق هذه الطريقة نمر بخطوتين:

الخطوة الأولى:

ندخل على الشكل القياسي المتغيرات الاصطناعية v_j والدالة ψ ثم نطبق على البرنامج المتحصل عليه

طريقة السمبلكس. في آخر الخطوة الأولى نتحصل على ثلاث حالات:

الحالة 1: $\text{Min } \psi > 0$ هذا يعني أن المشكل المطروح ليس لديه حل.

الحالة 2: $\text{Min } \psi = 0$ وكل $v_j = 0, j = \overline{1, k}$ ، في هذه الحالة نعيد كتابة الجدول الأخير بدون v_j

ونذهب إلى الخطوة الثانية "أ".

الحالة 3: توصلنا إلى الحل الأمثل للمرحلة الأولى مع وجود على الأقل متغير وهمي (اصطناعي) في

الأساس و $\text{Min } \psi = 0$ نذهب إلى الخطوة الثانية "ب".

الخطوة الثانية:

أ- إذا كان $v_j = 0$ ، نطبق طريقة السمبلكس على آخر جدول في المرحلة الأولى (بدون ψ و v_j).

ب- إذا وجد على الأقل $v_j \neq 0$ ، نطبق طريقة غوص للتخلص من المتغيرات الاصطناعية v_j في الأساس

ثم نطبق طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل.

نعطي مثالين لتوضيح فكرة الخوارزم للطالب.

مثال 13.3: ليكن البرنامج الخطي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max}(5x_1 + 10x_2 + 15x_3), \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\ x_1 + x_2 \geq 100, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

عند المبدأ (0,0,0) لدينا:

$$0 + 0 + 0 \leq 500$$

$$0 + 0 \geq 100 ! \quad \text{مشكل}$$

$$0 - 0 - 0 = 120 ! \quad \text{مشكل}$$

لندخل متغيرين وهميين هما: v_1, v_2

الشكل المعياري:

$$(PL) \begin{cases} (5x_1 + 10x_2 + 15x_3 - z = 0), \\ \text{Min}(\psi = v_1 + v_2), \\ x_1 + x_2 + x_3 + e_1 = 500, \\ x_1 + x_2 - e_2 + v_1 = 100, \dots (1) \\ x_1 - x_2 - x_3 + v_2 = 120, \dots (2) \\ x_j \geq 0, e_i \geq 0, v_i \geq 0, j = \overline{1,3}; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

لنبحث عن v_1 و v_2 :

$$(1) \Rightarrow v_1 = 100 - x_1 - x_2 + e_2$$

$$(2) \Rightarrow v_2 = 120 - x_1 + x_2 + x_3$$

و عليه:

$$v_1 + v_2 = 220 - 2x_1 + x_3 + e_2$$

إذن:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max}(5x_1 - 10x_2 - 15x_3 - z = 0), \\ \text{Min}(\psi + 2x_1 - x_3 - e_2 = 220), \\ x_1 + x_2 + x_3 + e_1 = 500, \\ x_1 + x_2 - e_2 + v_1 = 100, \\ x_1 - x_2 - x_3 + v_2 = 120, \\ x_j \geq 0, e_i \geq 0, v_i \geq 0, i = 1,2; j = 1,3. \end{cases}$$

الجدول الابتدائي T_0 :

T_0	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	v_2	b_i
e_1	1	1	1	1	0	0	0	500
v_1	1	1	0	0	-1	1	0	100
v_2	1	-1	-1	0	0	0	1	120
$-Z$	5	10	15	0	0	0	0	0
ψ	2	0	-1	0	-1	0	0	220

T_1	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	v_2	b_i
e_1	0	0	1	1	1	/	0	400
x_1	1	1	0	0	-1	/	0	100
v_2	0	-2	-1	0	1	/	1	20
$-Z$	0	5	15	0	5	/	0	-500
ψ	0	-2	-1	0	1	/	0	20

T_2	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	v_2	b_i
e_1	0	2	2	1	0	/	/	380
x_1	1	-1	-1	0	0	/	/	120
e_2	0	-2	-1	0	1	/	/	20
$-Z$	0	15	20	0	0	/	/	-600
ψ	0	0	0	0	0	/	/	0

نلاحظ أن معاملات دالة الهدف (الوهمية) كلها معدومة و $Min \psi = 0$ إذن ننتقل إلى الخطوة الثانية.²

T_3	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b_i
e_1	0	2	2	1	0	380
x_1	1	-1	-1	0	0	120
e_2	0	-2	-1	0	1	20
$-Z$	0	15	20	0	0	-600

نلاحظ أن معاملات دالة الهدف ليست كلها معدومة أو سالبة إذن نكمل الحل باستعمال السمبلكس العادي.

T^*	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b_i
x_3	0	1	1	1/2	0	190
x_1	1	0	0	1/2	0	310
e_2	0	-1	0	1/2	1	20
$-Z$	0	-5	0	-10	0	-4400

نلاحظ أن معاملات دالة الهدف كلها معدومة أو سالبة. وعليه: $z^* = 4400$, $x^* = (310, 0, 190)^t$.

مثال 14.3:

طلب مدير إحدى المؤسسات لإنتاج الأثاث من أحد المختصين أن يضع له برنامج خطي لتسويق منتجاته وبعد التشاور على كمية المنتجات التي يريد الحصول عليها لتعظيم الربح، قام المختص بإخفاء البرنامج الحقيقي الذي توصل إليه وانطلق من الجدول التالي:

T_2	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	b_i
x_1	1/2	1	1/2	1/2	0	0	75
v_1	1/2	0	1/2	1/2	0	1	95
e_2	1/2	0	5/2	1/2	1	0	175
$-Z$	2	0	0	1	0	0	-150
ψ	1/2	0	1/2	-1/2	0	0	75

هل البرنامج الذي وضع من طرف المختص في صالح المؤسسة. علل؟
- نلاحظ أن الجدول المعطى ليس مثالي، إذن نكمل الحل فنتحصل على الجدول التالي:

T_3	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	b_i
x_1	1	2	1	1	0	0	150
v_1	0	-1	0	0	0	1	20
e_2	0	-1	2	0	1	0	100
$-Z$	0	-4	-2	-1	0	0	-450
ψ	0	-1	0	-1	0	0	0

نلاحظ أن معاملات دالة الهدف كلها معدومة أو سالبة و $Min \psi = 0$ لكن بقي v_1 داخل الأساس وعليه نذهب للمرحلة الثانية ب وذلك بتطبيق طريقة غوص للتخلص منه.

T_4	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	b_i
x_1	1	0	1	1	0	/	190
x_2	0	1	0	0	0	/	-20
e_2	0	0	2	0	1	/	80
$-Z$	0	0	-2	-1	0	/	-530
ψ	0	0	0	-1	0	/	-20

نلاحظ أن معاملات دالة الهدف (الوهمية) كلها معدومة أو سالبة ومنه ننتقل إلى المرحلة الثانية.

T_5	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	b_i
x_1	1	0	1	1	0	/	190
x_2	0	1	0	0	0	/	-20
e_2	0	0	2	0	1	/	80
$-Z$	0	0	-2	-1	0	/	-530

نلاحظ أن $b_2 = -20$ وقيم c_j سالبة لا نستطيع تقسيمها على السطر الذي يحتوي على b_2 (أنظر الفصل الثالث - طريقة السمبلكس المرافق-)، إذن هناك خطأ في صياغة المسألة ومنه هذا البرنامج لا يخدم المؤسسة وعليه يجب صياغة برنامج آخر جديد.

4.2 حالات خاصة في البرمجة الخطية (Special Cases)

للبرمجة الخطية ثلاث حالات غير عادية تؤثر على متخذ القرار وهي:

• حالة الحلول المثلى البديلة (التوليفة)

تعريف 1.4:

نقول أنه لدينا حلول مثلى بديلة (ملا نهاية من الحلول) إذا تغيرت قيم x_j مع بقاء دالة الهدف ثابتة.

نأخذ مثال نوضح فيه التعريف:

مثال 2.4:

ليكن البرنامج الخطي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

بعد الحل باستعمال طريقة السمبلكس العادي توصلنا إلى الجدول المثالي التالي:

	x_1	x_2	e_1	e_2	b_i
x_2	1/2	1	1/4	0	3
e_2	5/2	0	-1/4	1	7
$-Z$	0	0	-1/2	0	-6

ملاحظة 3.4:

يمكن معرفة وجود حلول مثلى بديلة من خلال وجود قيمة الصفر في السطر الأخير من الجدول النهائي (المثالي) كمعامل لأحد المتغيرات غير الأساسية.

• حالة عدم الانتظام

تعريف 4.4:

نقول أنه لدينا حالة عدم انتظام إذا توصلنا إلى الحل الأمثل وكان لدينا متغير في الأساس قيمته الصفر.

مثال 5.4:

ليكن البرنامج الخطي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } Z = 80x_1 + 70x_2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 120, \\ x_1 \leq 70, \\ x_1 + x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

بعد الحل باستعمال طريقة السمبلكس العادي توصلنا إلى الجدول المثالي التالي:

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
x_1	1	0	1	0	-1	60
e_2	0	0	-1	1	1	10
x_2	0	1	-1	0	2	0
$-Z$	0	0	-10	0	-60	-4800

لدينا: $x_2 = 0$ إذن نقول أن لدينا حالة عدم انتظام.

• حالة عدم وجود حلول

تعريف 6.4:

إذا كانت كل معاملات دالة الهدف الوهمية سالبة أو معدومة وكان $Min \psi \geq 0$ نقول أن البرنامج لا يقبل حلاً.

لنأخذ مثال نوضح فيه التعريف 6.4.

مثال 7.4:

ليكن البرنامج الخطي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Min } Z = 10x_1 + 15x_2, \\ x_1 + x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \geq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

بعد الحل باستعمال طريقة السمبلكس على مرحلتين توصلنا إلى الجدول المثالي التالي:

	x_1	x_2	e_1	e_2	v_1	b_i
x_1	1	1	1	0	0	20
v_1	0	0	-1	-1	1	10
Z	0	-5	10	0	0	30
ψ	0	0	-1	-1	0	10

$\text{Min } \psi = 10 > 0$ ومنه البرنامج ليست له حلول.

ختاماً قد تواجه متخذ القرار عند صياغة البرنامج الخطي متغيرات كثيرة (مثلاً 1000 متغير فما فوق) هذا ما يفرض عليه اللجوء إلى الحاسوب (ماتلاب *Matlab* أو مايبل *Maple* أو سيلاب *Scilab*) وذلك لكثرة الحسابات.

برنامج بلغة مايبل (Maple)

> **with(simplex) :**

> **A:=matrix(n,m,[a11,a12,...,a1m,a21,...,a2m,...,anm]) :**

> **B:=matrix(n,1,[b1,...,bn]) :**

> **x:=matrix(m,1,[x1,...,xm]) :**

> **C:={ a11*x1+ a12*x2+...+ a1m *xm (<=,=,>=) b1,..., an1*x1+ an2*x2+...+ anm*xm(<=,=,>=) bn} :**

> **Obj:=c1*x1 +c2*x2+...+cm*xm:**

> **maximize(Obj,C, NONNEGATIVE) :**

تمارين حول الفصل الثاني

التمرين الأول:

باستعمال الطريقة البيانية أوجد حل البرامج التالية:

$$(1) \begin{cases} \text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2, \\ x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}, (2) \begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

التمرين الثاني:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max } \left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \right), \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 20, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 24, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

1- أكتب البرنامج على الشكل المعياري.

2- باستعمال الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرنامج السابق.

التمرين الثالث:

باستعمال طريقة السمبلكس حل البرامج التالية:

$$(1) \begin{cases} \text{Max } Z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} \text{Max } Z = 8x_1 + 8x_2 + 4x_3, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 2, \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

التمرين الرابع:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Min } Z = 7x_1 - 3x_2, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 25, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 - 3x_2 \leq 36, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1- أكتب البرنامج على الشكل القانوني.

2- باستعمال خوارزمية السمبلكس أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

التمرين الخامس:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max}(2x_1 + 4x_2 + 3x_3), \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 30, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

وجدوله المثالي المرفق له هو T^* :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
x_1							
e_2							
x_3							
-Z							

• المطلوب إكمال الجدول واستنتاج الحل الأمثل.

التمرين السادس:

باستعمال خوارزم السمبلكس على مرحلتين حل البرامج التالية:

$$(1) \begin{cases} \text{Max } Z = (2x_1 + x_2 + 3x_3), \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 40, \\ x_1 + x_2 = 18, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}, \quad (2) \begin{cases} \text{Min } Z = (2x_1 + 3x_2), \\ x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

حل تمارين الفصل الثاني

حل التمرين الأول:

(1) لدينا

$$(1) \begin{cases} \text{Min } Z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

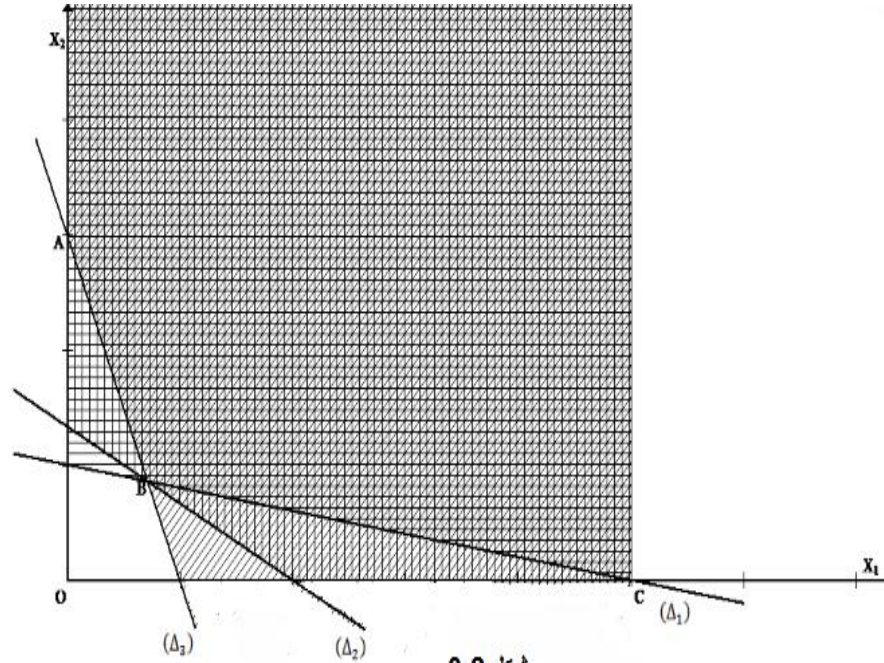
$$(\Delta_1) : x_1 + 5x_2 = 10$$

$$(\Delta_2) : 2x_1 + 3x_2 = 8$$

$$(\Delta_3) : 3x_1 + x_2 = 6$$

نرسم المستقيمات $(\Delta_3), (\Delta_2), (\Delta_1)$

	(Δ_1)		(Δ_2)		(Δ_3)	
x_1	0	10	0	4	0	2
x_2	2	0	8/3	0	6	0



شكل 3-2

من الشكل 2-3 نلاحظ أن الحل الأمثل موجود في المنطقة المفتوحة x_1ABCx_2 حيث:

$$A = (0, 6); B = (4/3, 2); C = (10, 0).$$

$$z^* = \text{Min}\{z_A, z_B, z_C\} = \text{Min}\left\{18, \frac{26}{3}, 20\right\} = 26/3$$

إذن الحل الأمثل هو: $x^* = (\frac{4}{3}, 2)$ ودالة الهدف: $z^* = 26/3$.

(2) لدينا:

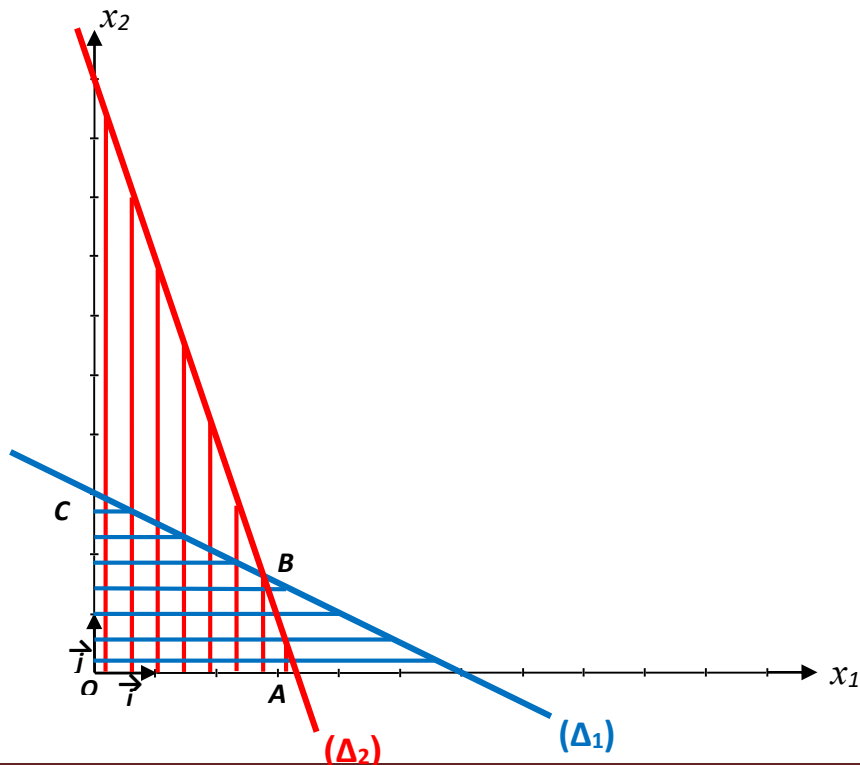
$$(2) \begin{cases} \text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(\Delta_1) : 2x_1 + 4x_2 = 12$$

$$(\Delta_2) : 3x_1 + x_2 = 10$$

نرسم المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

	(Δ_1)		(Δ_2)	
x_1	0	6	0	$\frac{10}{3}$
x_2	3	0	10	0



الحل الأمثل يكون على قمم المضلع $O A B C$

حيث: $A = (\frac{10}{3}, 0)$, $B = (2.8, 1.6)$, $C = (0, 3)$, $O = (0, 0)$

$$Z_O = 0, Z_A = \frac{10}{3}, Z_B = 6, Z_C = 6.$$

$$Z^* = \text{Max} \{ Z_O, Z_A, Z_B, Z_C \} / Z_B^* = Z_C^* = 6.$$

أي نقطة من نقاط القطعة المستقيمة $[BC]$ هي حل أمثل وهذا يعني أن هناك ما لانهاية من الحلول المثلى وتدعى هذه الحلول بالتوليفة أو الحلول المثلى البديلة.

حل التمرين الثاني:

لدينا:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max} \left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \right), \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 20, \dots\dots\dots (1) \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 24, \dots\dots\dots (2) \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \dots\dots (*) \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}x_1 + x_2$$

بتعويض (*) في (1) و (2) نجد:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max} (x_1 + 3x_2), \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

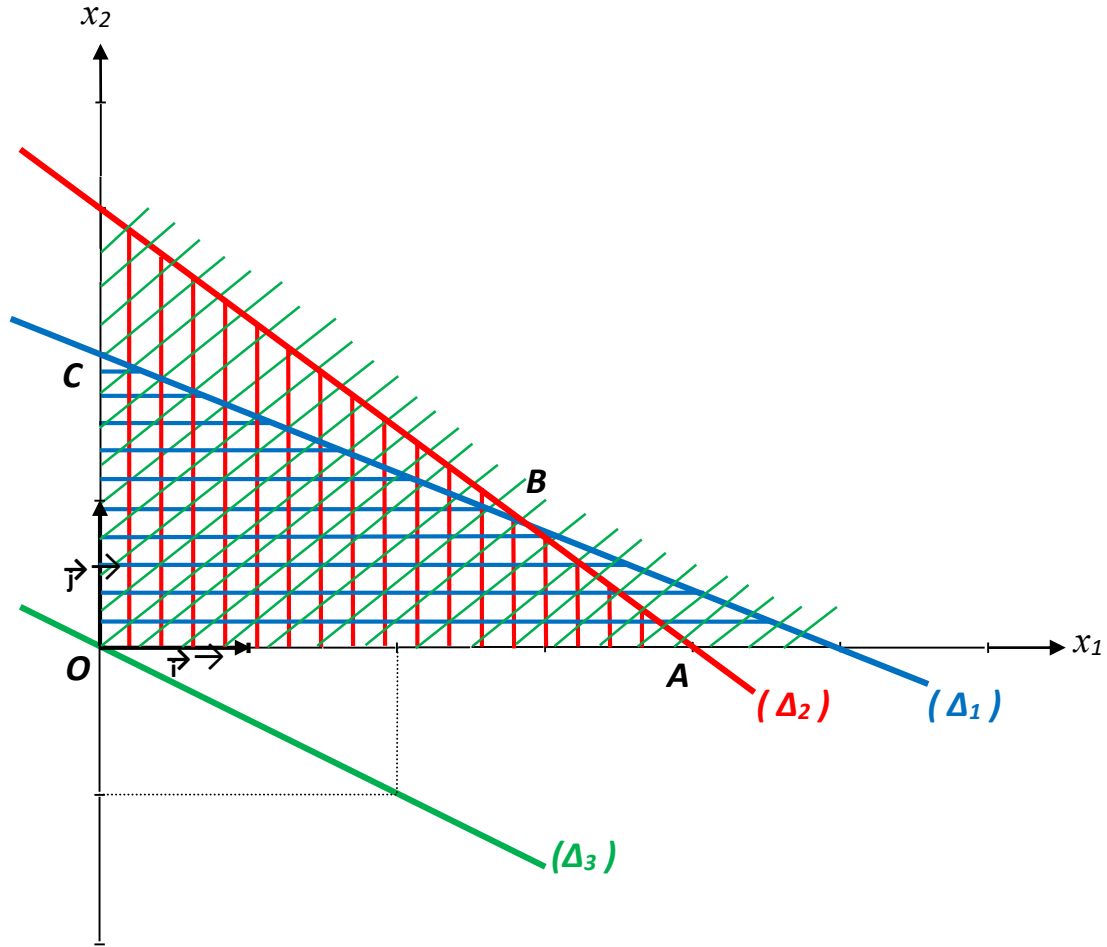
$$(\Delta_1) : 2x_1 + 5x_2 = 10$$

$$(\Delta_2) : 3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$(\Delta_3) : \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0$$

نرسم المستقيمات $(\Delta_3), (\Delta_2), (\Delta_1)$:

	(Δ_1)		(Δ_2)		(Δ_3)	
x_1	0	5	0	4	0	2
x_2	2	0	3	0	0	-1



الحل الأمثل يكون على قمم المضلع $OABC$ حيث:

$$O=(0, 0), A=(4, 0), B=(x_0, y_0), C=(0, 2).$$

إيجاد B:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 7x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{7}.$$

$$\text{إذن: } B = \left(\frac{20}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

نعوض إحداثيات كل نقطة من رؤوس المضلع في دالة الهدف فنجد:

$$z_0 = 0, z_A = 4, z_B = \frac{38}{7}, z_C = 6.$$

$$z^* = \text{Max}\{z_0, z_A, z_B, z_C\}$$

ومنه: $x_1^* = 0$ ، $x_3^* = 2$ بالتعويض نجد:

$$x_3 = \frac{1}{2}x_1 + x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$$

إذن الحل الأمثل هو: $x^* = (0, 2, 2)$ ودالة الهدف هي: $z^* = 6$.

حل التمرين الثالث:

1- الشكل المعياري:

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 + e_1 = 42, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + e_2 = 17, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + e_3 = 24, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, e_1, e_2, e_3 \geq 0. \end{cases}$$

2- الجدول الابتدائي T_0 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	2	4	5	7	1	0	0	42
e_2	1	1	2	2	0	1	0	17
e_3	1	2	3	3	0	0	1	24
$-z$	7	9	18	17	0	0	0	0

3- البحث عن المرتكز:

$$\text{Max}\{7, 9, 18, 17\} = 18 = c_3 \text{ ومنه عمود المرتكز هو العمود 3.}$$

$$\text{Min}\left\{\frac{42}{5}, \frac{17}{2}, \frac{24}{3}\right\} = \frac{24}{3} = \frac{b_3}{a_{33}} \text{ ومنه سطر المرتكز هو السطر 3.}$$

$$a_{33} = 3 \text{ ومنه المرتكز هو: } 3$$

4- نعدم الأعداد في عمود المرتكز:

$$l'_1 \leftarrow l_1 - \frac{5}{3}l_3, \quad l'_2 \leftarrow l_2 - \frac{2}{3}l_3, \quad l'_4 \leftarrow l_4 - \frac{18}{3}l_3$$

5- نقسم السطر المرتكز على المرتكز: $l'_3 \leftarrow \frac{1}{3}l_3$

في الأساس. e_3 مكان المتغير $-6x_3$ ندخل المتغير

نتحصل على الجدول التالي T_1 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	1/3	2/3	0	2	1	0	-5/3	2
e_2	1/3	-1/3	0	0	0	1	-2/3	1
x_3	1/3	2/3	1	1	0	0	1/3	8
-z	1	-3	0	-1	0	0	-6	-144

معاملات دالة الهدف في الجدول ليست كلها سالبة.

* البحث عن المرتكز:

$Max\{1,0\} = 1 = c_1$ ومنه عمود المرتكز هو العمود رقم 1.

$Min\{6,3,8\} = 3 = \frac{b_2}{a_{12}}$ ومنه سطر المرتكز هو السطر 2.

ومنه المرتكز هو $a_{21} = 1/3$.

* نقسم السطر المرتكز على المرتكز ونعدم الأعداد في عمود المرتكز:

$$l'_1 \leftarrow l_1 - l_2, \quad l'_3 \leftarrow l_3 - l_2, \quad l'_4 \leftarrow l_4 - 3l_2, \quad l'_2 \leftarrow 3l_2$$

* ندخل المتغير x_1 مكان المتغير e_2 في الأساس.

T_2 نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	1	0	2	1	-1	-1	1
x_1	1	-1	0	0	0	3	-2	3
x_3	0	1	1	1	0	-1	1	7
-z	0	-3	0	-1	0	-3	-4	-147

نلاحظ أن المعاملات c_j كلها سالبة.

إذن: الحل الأمثل هو: $x^* = (3,0,7,0)$ ودالة الهدف هي: $z^* = 147$.

(2) تترك لطالب.

حل التمرين الرابع:

1- الشكل القانوني الجديد

لدينا: $Min(z) = -Max(-z)$

نضع: $z' = -z$

ومنه: $Max(z' = -7x_1 + 3x_2)$

-الشكل القانوني الجديد لهذا البرنامج هو:

$$(P') \begin{cases} Max z' = -7x_1 + 3x_2, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 25, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 - 3x_2 \leq 36, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2- إيجاد الحل الأمثل باستعمال السمبلكس العادي

الجدول الابتدائي:

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	-2	4	1	0	0	25
e_2	1	2	0	1	0	14
e_3	1	-3	0	0	1	36
$-z'$	-7	3	0	0	0	0

3- البحث عن المرتكز:

$Max c_i = 3 = c_2$ ومنه عمود المرتكز هو العمود 2.

$Min \left\{ \frac{25}{4}, \frac{14}{2} \right\} = \frac{25}{4} = \frac{b_1}{a_{12}}$ ومنه سطر المرتكز هو السطر 1.

ومنه المرتكز هو $a_{12} = 4$.

4- نعدم الأعداد في عمود المرتكز:

$$l'_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{2}l_3, \quad l'_3 \leftarrow l_3 + \frac{3}{2}l_3, \quad l'_4 \leftarrow l_4 - \frac{3}{4}l_1$$

5- نقسم السطر المرتكز على المرتكز: $l'_1 \leftarrow \frac{1}{4}l_1$

6- ندخل المتغير x_2 مكان المتغير e_1 في الأساس.

T_1 : - نحصل على الجدول التالي

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
x_2	-1/2	1	1/4	0	0	25/4
e_2	2	0	-1/2	1	0	3/2
e_3	-1/2	0	3/4	0	1	219/4
$-z'$	-11/2	0	-3/4	0	0	-75/4

معاملات تابع الهدف كلها سالبة، ومنه: $T_1 = T^*$ هو الجدول المثالي.

الحل الأمثل للبرنامج هو: $z'^* = \frac{75}{4}$ ، $x'^* = \left(0, \frac{25}{4}\right)$.

ومنه الحل الأمثل هو: $z^* = -\frac{75}{4}$ ، $x^* = \left(0, \frac{25}{4}\right)$.

حل التمرين الخامس:

لإكمال الجدول المثالي نطبق طريقة غوص على الجدول الابتدائي أي نقوم بإدخال المتغيرين x_1 و x_3 للأساس.

لدينا الجدول الابتدائي:

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	1	3	2	1	0	0	15
e_2	1	1	1	0	1	0	12
e_3	3	5	3	0	0	1	30
$-z$	2	4	3	0	0	0	0

إلى الأساس كالتالي: x_1 -1 ندخل المتغير

$$l'_1 \leftarrow l_1, \quad l'_2 \leftarrow l_2 - l_1, \quad l'_3 \leftarrow l_3 - 3l_1, \quad l'_4 \leftarrow l_4 - 2l_1$$

نتحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
x_1	1	3	2	1	0	0	15
e_2	0	-2	-1	-1	1	0	-3
e_3	0	-4	-3	-3	0	1	-15
$-z$	0	-2	-1	-2	0	0	-30

ندخل المتغير x_3 مكان المتغير e_3 في الأساس.

$$l'_3 \leftarrow -\frac{1}{3}l_3, \quad l'_1 \leftarrow l_1 + \frac{2}{3}l_3, \quad l'_2 \leftarrow l_2 - \frac{1}{3}l_3, \quad l'_4 \leftarrow l_4 - \frac{1}{3}l_3$$

نحصل على الجدول التالي وهو الجدول المثالي.

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b_i
x_1	1	1/3	0	-1	0	2/3	5
e_1	0	-2/3	0	0	1	-1/3	2
x_3	0	4/3	1	1	0	-1/3	2
-z	0	-2/3	0	-1	0	-1/3	-25

من الجدول نستنتج أن الحل الأمثل هو: $x^* = (5, 0, 5)$ ، ودالة الهدف هي: $z^* = 25$.

حل التمرين السادس:

(1) الشكل المعياري يعطى بـ:

$$\begin{cases} \text{Max}(z = 2x_1 + x_2 + 3x_3), \\ x_1 + x_2 + x_3 - e_1 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + e_2 = 40, \\ x_1 + x_2 = 18, \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 \geq 0. \end{cases}$$

نبحث عن الحل عند المبدأ (0,0)

المعادلة الأولى: $-10 \leq 0$ - هناك مشكل، ندخل متغير اصطناعي (وهي) وليكن v_1 .

المعادلة الثانية: $0 \leq 40$ - محققة.

المعادلة الثانية: $0 = 18$ - هناك مشكل، ندخل متغير اصطناعي (وهي) وليكن v_2 .

v_1 والدالة φ إدخال المتغيرات الوهمية .

$$\begin{cases} \text{Min} (\varphi = v_1 + v_2) \\ x_1 + x_2 + x_3 - e_1 + v_1 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + e_2 = 40 \\ x_1 + x_2 + v_2 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, v_1, v_2 \geq 0 \end{cases}$$

*حساب قيم v_i

$$v_1 = 10 - x_1 - x_2 + x_3 + e_1$$

$$v_2 = 18 - x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} \text{Min } (\varphi = 28 - 2x_1 - 2x_2 - x_3 + e_1) \\ \varphi + 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 = 28 \\ z - 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_i, e_j, v_j \geq 0, i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

- نشكل الجدول الابتدائي:

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	v_2	b_i
v_1	1	1	1	-1	0	1	0	10
e_2	1	2	4	0	1	0	0	40
v_2	1	1	0	0	0	0	1	18
$-Z$	2	1	3	0	0	0	0	0
φ	2	2	1	-1	0	0	0	28

- الجدول الثاني:

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	v_2	b_i
x_1	1	1	1	-1	0	/	0	10
e_2	0	1	3	1	1	/	0	30
v_2	0	0	-1	1	0	/	1	8
$-z$	0	-1	1	2	0	/	0	-20
φ	0	0	-1	1	0	/	0	28

- الجدول الثالث:

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	v_1	v_2	b_i
x_1	1	1	0	0	0	/	/	18
e_2	0	1	4	0	1	/	/	22
e_1	0	0	-1	1	0	/	/	8
$-z$	0	-1	3	0	0	/	/	-36
φ	0	0	0	0	0	/	/	0

- نلاحظ أن كل معاملات φ أصغر أو يساوي الصفر.

إذن: توصلنا إلى نهاية المرحلة الأولى مع $v_i = 0, \text{Min } \varphi = 0$
ننتقل إلى المرحلة الثانية:

- φ و كتابة الجدول الابتدائي بدون v_i .

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b_i
x_1	1	1	0	0	0	18
x_3	0	1/4	1	0	0	11/2
e_1	0	1/4	0	1	1	12
-z	0	-7/4	0	0	0	105/2

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	b_i
x_1	1	1	0	0	0	18
e_2	0	1	4	0	1/4	22
e_1	0	0	-1	1	1/4	8
-z	0	-1	3	0	-3/4	-36

كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة، ومنه الحل الأمثل يعطى بـ: $x^* = (18, 0, \frac{11}{2})$ ودالة

الهدف تعطى بـ: $z^* = 105/2$.

(2) الشكل المعياري:

$$\begin{cases} \text{Min}(Z = 2x_1 + 3x_2) \\ x_1 + 5x_2 - e_1 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - e_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - e_3 = 6 \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

ندخل المتغيرات الوهمية ودالة الهدف، لدينا: $\varphi = v_1 + v_2 + v_3$

$$\begin{cases} \text{Min}(\varphi = v_1 + v_2 + v_3) \\ x_1 + 5x_2 - e_1 + v_1 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - e_2 + v_2 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - e_3 + v_3 = 6 \\ x_i, e_j, v_j \geq 0, i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3} \end{cases}$$

$$v_1 = 10 - x_1 - 5x_2 + e_1 \quad \text{مع:}$$

$$v_2 = 8 - 2x_1 - 3x_2 + e_2$$

$$v_3 = 6 - 3x_1 - x_2 + e_3$$

وعليه لدينا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } (\varphi = 24 - 6x_1 - 9x_2 + e_1 + e_3 + e_3) \\ \varphi + 6x_1 + 9x_2 - e_1 - e_2 - e_3 = 24 \\ z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_i, e_j, v_j \geq 0, i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3} \end{array} \right.$$

إذن الجدول الابتدائي

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	v_1	v_2	v_3	b_i
v_1	1	5	-1	0	0	1	0	0	10
v_2	2	3	0	-1	0	0	1	0	8
v_3	3	1	0	0	-1	0	0	1	6
$-z$	-2	-3	0	0	0	0	0	0	0
φ	6	9	-1	-1	-1	0	0	0	24

لنبحث عن المرتكز، ومنه الجدول الموالي هو:

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	v_1	v_2	v_3	b_i
x_2	1/5	1	-1/5	0	0	/	0	0	2
v_2	7/5	0	3/5	-1	0	/	1	0	2
v_3	14/5	0	1/5	0	-1	/	0	1	4
$-z$	-7/5	0	-3/5	0	0	/	0	0	6
φ	21/5	0	4/5	-1	-1	/	0	0	6

الجدول الثالث هو:

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	v_1	v_2	v_3	b_i
x_2	0	1	-10/35	1/7	0	/	/	0	12/7
x_1	1	0	3/7	-5/7	0	/	/	0	10/7
v_3	0	0	-1	2	-1	/	/	1	0
$-z$	0	0	0	-1	0	/	/	0	8
φ	0	0	-1	2	-1	/	/	0	0

- الجدول الرابع:

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	v_1	v_2	v_3	b_i
x_2	0	1	-3/14	0	1/14	/	/	/	12/7
x_1	1	0	1/14	0	-5/14	/	/	/	10/7
e_2	0	0	-1/2	1	-1/2	/	/	/	0
$-z$	0	0	-1/2	0	-1/2	/	/	/	8
φ	0	0	0	0	0	/	/	/	0

كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة.

إذن: توصلنا إلى نهاية المرحلة الأولى مع: $v_i = 0, \text{Min } \varphi = 0$

φ و ننتقل إلى المرحلة الثانية وهي كتابة الجدول الابتدائي بدون v_i .

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
x_1	0	1	-3/14	0	1/14	12/7
e_2	1	0	1/14	0	-5/14	10/7
e_1	0	0	-1/2	1	-1/2	0
$-z$	0	0	-1/2	0	-1/2	8

كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة، ومنه الحل الأمثل يعطى بـ: $x^* = \left(\frac{10}{7}, \frac{12}{7}\right)$ ودالة الهدف تعطى بـ $z^* = 8$.