

# Espaces de Sobolev

Dr. Amira Makhlouf

15 avril 2026

<b>0</b>	<b>Rappels sur les espaces <math>L^p</math></b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Espace de Sobolev en dimension un</b>	<b>10</b>
1.1	Dérivée faible . . . . .	10
1.2	Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ . . . . .	13
1.3	Propriétés de $W^{1,p}(I)$ . . . . .	18
1.3.1	Espaces de Sobolev et continuité . . . . .	18
1.3.2	Séparabilité . . . . .	20
1.3.3	Réflexivité . . . . .	21
1.3.4	Quelques résultats de caractérisation . . . . .	21
1.3.5	Prolongement continu . . . . .	26
1.3.6	Densité des fonctions régulières . . . . .	29
1.4	Injections de Sobolev . . . . .	32
1.4.1	Injection continue . . . . .	32
1.4.2	Injection compacte . . . . .	38
1.5	Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$ . . . . .	39
1.6	Dualité et convergence faible . . . . .	40
1.7	Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$ . . . . .	42
1.7.1	Définition et caractérisation . . . . .	42
1.7.2	Inégalité de Poincaré . . . . .	44
1.7.3	Espace dual de $W_0^{1,p}(I)$ . . . . .	46

<b>2 Problèmes élliptiques linéaires</b>	<b>49</b>
2.1 Problème variationnel et théorème de Lax-Milgram . . . . .	49
2.2 Problème avec des conditions au limites de type Dirichlet . . . . .	50
2.2.1 Formulation faible . . . . .	50
2.2.2 Existence et unicité d'une solution faible . . . . .	53
2.2.3 Régularité . . . . .	54
2.3 Problème avec des conditions aux limites de type Neumann . . . . .	55
2.3.1 Formulation faible . . . . .	55
2.3.2 Existence et unicité d'une solution faible et régularité . . . . .	57
<b>3 Espaces de Sobolev en dimension <math>N</math></b>	<b>60</b>
3.1 Dérivée faible . . . . .	60
3.2 Définition et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	61
3.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	63
3.4 Opérateur de prolongement et densité . . . . .	64
3.5 Injection de Sobolev . . . . .	65
3.6 Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	66

## CHAPITRE 0

### Rappels sur les espaces $L^p$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  pour  $d \in \mathbb{N}^*$  quelconque et  $I$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$ , pas forcément borné.

**Définition 0.0.1 (Fonction mesurable).** Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *mesurable* si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $A_\alpha = \{x \in \Omega; f(x) \geq \alpha\}$  est mesurable au sens de Lebesgue.

**Définition 0.0.2 (Fonction intégrable).** On dit qu'une fonction mesurable  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est *intégrable au sens de Lebesgue* si

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx < +\infty.$$

On désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs réelles. Deux fonctions qui coïncident presque partout sur  $\Omega$  sont identifiées, c'est-à-dire considérées comme égales dans  $L^1(\Omega)$ .

**Définition 0.0.3 (Espaces  $L^p$ ).** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Une fonction mesurable  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  *$p$ -intégrable* si

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

On appelle *espace de Lebesgue*  $L^p(\Omega)$  l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \text{ intégrable}\}.$$

De plus, pour toute fonction  $f \in L^p(\Omega)$ , on définit  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

---

Comme précédemment, deux fonctions égales presque partout sur  $\Omega$  sont identifiées dans  $L^p(\Omega)$ .

Si  $p = \infty$  on a la définition suivante

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe } C \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

et on définit  $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$  par

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{\alpha; |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , on note  $q$  le conjugué de  $p$ , c'est à dire le réel tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Théorème 0.0.1.** *On a les propriétés suivantes.*

1.  $L^p(\Omega)$  est un espace vectoriel et  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  est une norme pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .
2.  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .
3.  $L^p(\Omega)$  est séparable pour tout  $1 \leq p < \infty$ .
4. (Représentation de Riesz) Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , le dual de  $L^p(\Omega)$  s'identifie à  $L^q(\Omega)$  de la façon suivante : à toute forme linéaire continue  $T$  sur  $L^p(\Omega)$  on peut associer de façon unique une fonction  $f \in L^q(\Omega)$  telle que :

$$\langle T, u \rangle = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

De plus, on a  $\|f\|_{L^q(\Omega)} = \|T\|_{(L^p(\Omega))'}$ .

5.  $L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Théorème 0.0.2 (Inégalité de Young).** *Soit  $1 < p < \infty$ . Alors pour tous  $a, b \in [0, \infty[$  on a*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

**Théorème 0.0.3 (Inégalité de Hölder).** *Soit  $1 \leq p \leq \infty$  et soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$ . Alors  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$  et*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

---

*Remarque 0.0.1.*  $L^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Dans ce cas, l'inégalité de Hölder pour  $L^2(\Omega)$  est l'inégalité de Schwartz

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

Dans ce qui suit, l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  désigne l'ensemble des  $f \in C^\infty(\Omega)$  dont le support *supp* $f$  est compact.

**Théorème 0.0.4 (Théorème de densité).** *Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ . Autrement dit, pour toute fonction  $f \in L^p(\Omega)$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$  tel que  $\|f - f_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ .*

**Théorème 0.0.5 (Comparaison entre les espaces  $L^p$ ).** *Soient  $1 \leq p < p' \leq \infty$  et supposons que  $\text{mes}(\Omega) = \int_{\Omega} 1dx < +\infty$ . Alors,  $L^{p'}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ . De plus, pour tout  $f \in L^{p'}(\Omega)$*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \text{mes}(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

*L'injection de  $L^{p'}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$  est donc continue.*

**Théorème 0.0.6 (Convergence dominée).** *Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $L^p(\Omega)$  vérifiant*

1.  $f_n \rightarrow f$  p.p. sur  $\Omega$ ;
2. il existe une fonction  $g \in L^p(\Omega)$  tel que  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

*Alors,  $f \in L^p(\Omega)$  et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

**Définition 0.0.4 (Convergence faible dans les espaces  $L^p$ ).**

1. Si  $1 \leq p < \infty$ , on dit qu'une suite  $(f_n)$  **converge faiblement** vers  $f$  dans  $L^p(\Omega)$  si  $f_n, f \in L^p(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))g(x)dx = 0, \quad \forall g \in L^q(\Omega).$$

*On note  $f_n \rightharpoonup f$  dans  $L^p(\Omega)$ .*

- 
2. Si  $p = \infty$ , on dit qu'une suite  $(f_n)$  **converge faiblement\*** vers  $f$  dans  $L^\infty(\Omega)$  si  $f_n, f \in L^\infty(\Omega)$  et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x))g(x)dx = 0, \quad \forall g \in L^1(\Omega).$$

On note  $f_n \xrightarrow{*} f$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .

**Proposition 0.0.7.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega)$ , alors  $f_n \rightharpoonup f$  dans  $L^p(\Omega)$ , pour tout  $1 \leq p < \infty$ .
2. Si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , alors  $f_n \xrightarrow{*} f$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .
3. Si  $1 \leq p \leq \infty$  et si  $f_n \rightharpoonup f$  dans  $L^p(\Omega)$  pour  $1 \leq p < \infty$  ou  $f_n \xrightarrow{*} f$  dans  $L^\infty(\Omega)$ , alors la suite  $(\|f_n\|_{L^p(\Omega)})$  est bornée et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

4. Si  $1 < p < \infty$  et  $(f_n)$  est une suite bornée dans  $L^p(\Omega)$ , alors il existe une sous suite  $(f_{n_k})$  et  $f$  dans  $L^p(\Omega)$  tel que  $f_{n_k} \rightharpoonup f$  dans  $L^p(\Omega)$ .
5. Si  $(f_n)$  est une suite bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ , alors il existe une sous suite  $(f_{n_k})$  et  $f$  dans  $L^\infty(\Omega)$  tel que  $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$  dans  $L^\infty(\Omega)$ .

**Définition 0.0.5 (Fonction localement intégrable).** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est **localement intégrable** sur  $\Omega$  si  $f\mathbb{1}_K \in L^1(\Omega)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .

On note  $L^1_{loc}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions localement intégrables sur  $\Omega$ .

**Proposition 0.0.8.** Pour tout  $p$  tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ , on a  $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ .

*Remarque 0.0.2.* À chaque  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  correspond une distribution  $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  définie par

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (0.1)$$

Cependant, toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  n'est pas nécessairement de la forme  $T_f$  définie par (0.1) pour une certaine fonction  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ .

Par exemple, si  $0 \in \Omega$ , il n'existe pas de fonction localement intégrable  $f$  sur  $\Omega$  tel que, pour  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = \phi(0) = \delta_0(\phi),$$

où  $\delta_0$  désigne la **delta de Dirac** relative au point 0.

Les distributions qui peuvent s'écrire comme dans (0.1) sont appelées **distributions régulières**.

**Lemme 0.1 (Lemme fondamental du calcul des variations).** Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c(\Omega), \quad (0.2)$$

où  $C_c(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions continues à support compact.

Alors  $f = 0$  p.p. sur  $\Omega$ .

Dans la preuve de ce lemme, on aura besoin du théorème suivant.

**Théorème 0.0.9 (Tietze-Urysohn).** Soient  $E$  un espace métrique,  $A$  une partie fermée de  $E$ ,  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue et bornée. Alors il existe une application continue  $v : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui coïncide avec  $u$  dans  $A$  et tel que

$$\sup_{x \in E} v(x) = \sup_{y \in A} u(y), \quad \inf_{x \in E} v(x) = \inf_{y \in A} u(y).$$

### Preuve du Lemme 0.1.

On procède en deux étapes.

#### 1. Cas $\Omega$ de mesure finie et $f \in L^1(\Omega)$

On démontre en premier lieu le lemme sous des hypothèses plus fortes : on suppose que  $f \in L^1(\Omega)$  et que  $\Omega$  est de mesure finie. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le Théorème de densité, il existe  $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$  tel que

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon.$$

Par (0.4), on a pour tout  $\phi \in C_c(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} f_\varepsilon(x)\phi(x)dx \right| = \left| \int_{\Omega} (f(x) - f_\varepsilon(x))\phi(x)dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) - f_\varepsilon(x)| |\phi(x)| dx < \varepsilon \|\phi\|_{C(\text{supp}(\phi))}. \quad (0.3)$$

Posons

$$K_1 = \{x \in \Omega; f_\varepsilon(x) \geq \varepsilon\} = f_\varepsilon^{-1}([\varepsilon, \infty[) \subset \text{supp}(f_\varepsilon),$$

$$K_2 = \{x \in \Omega; f_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon\} = f_\varepsilon^{-1}(]-\infty, -\varepsilon]) \subset \text{supp}(f_\varepsilon).$$

Puisque  $f_\varepsilon$  est continue à support compact,  $K_1$  et  $K_2$  sont des compacts disjoints. Par le Théorème 0.0.9, en prenant pour  $u$  l'application de  $K_1 \cup K_2$  dans  $\mathbb{R}$ , égale à 1 dans  $K_1$  et à  $-1$  dans  $K_2$ , qui est continue dans  $K_1 \cup K_2$ , il existe une fonction  $u_0 \in C(\Omega)$  telle que

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K_1, \\ -1 & \text{si } x \in K_2, \end{cases}$$

et

$$|u_0(x)| \leq 1, \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Posons  $K = K_1 \cup K_2$ , alors

$$\int_{\Omega} f_\varepsilon(x)u_0(x)dx = \int_{\Omega \setminus K} f_\varepsilon(x)u_0(x)dx + \int_K f_\varepsilon(x)u_0(x)dx.$$

Donc, grâce à (0.3)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_\varepsilon(x)|dx &= \int_K f_\varepsilon(x)u_0(x)dx \\ &= \int_{\Omega} f_\varepsilon(x)u_0(x)dx - \int_{\Omega \setminus K} f_\varepsilon(x)u_0(x)dx \\ &\leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_\varepsilon(x)u_0(x)|dx \\ &\leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |f_\varepsilon(x)|dx. \end{aligned}$$

Or,

$$|f_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \quad \text{sur } \Omega \setminus K,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_\varepsilon(x)|dx &= \int_K |f_\varepsilon(x)|dx + \int_{\Omega \setminus K} |f_\varepsilon(x)|dx \\ &\leq \varepsilon + 2 \int_{\Omega \setminus K} |f_\varepsilon(x)|dx \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon \cdot \text{mes}(\Omega). \end{aligned}$$

Donc

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \|f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq 2\varepsilon(1 + \text{mes}(\Omega)).$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $f = 0$  p.p. sur  $\Omega$ .

2. On considère maintenant le cas général. On écrit  $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ , où  $\Omega_n$  est ouvert borné et  $\overline{\Omega_n}$  inclu dans  $\Omega$ . On peut prendre par exemple

$$\Omega_n = \left\{ x \in \Omega; \text{dist}(x, C_{\mathbb{R}^d}^\Omega) > \frac{1}{n} \text{ et } |x| < n \right\}.$$

En appliquant l'étape 1 avec  $\Omega_n$  et  $f|_{\Omega_n}$ , on obtient  $f = 0$  p.p. sur  $\Omega_n$  et on conclut que  $f = 0$  p.p. sur  $\Omega$ .  $\square$

**Corollaire 0.1.** *Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  tel que*

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (0.4)$$

*Alors  $f = 0$  p.p. sur  $\Omega$ .*

**Lemme 0.2.** *Soit  $f \in L^1_{loc}(I)$  tel que*

$$\int_I f(x)\phi'(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C^1_c(I), \quad (0.5)$$

*où  $C^1_c(I)$  est l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  sur  $I$ , à support compact dans  $I$ .*

*Alors, il existe une constante  $C$  telle que  $f = C$  p.p. sur  $I$ .*

**Preuve.**

Prenons une fonction  $\psi \in C_c(I)$  telle que  $\int_I \psi(t)dt = 1$ . Pour toute fonction  $u \in C_c(I)$ , il existe  $\phi \in C^1_c(I)$  telle que

$$\phi'(x) = u(x) - \left( \int_I u(t)dt \right) \psi(x), \quad \forall x \in I.$$

En effet, la fonction  $h = u - (\int_I u(t)dt)\psi$  est continue, comme somme de deux fonctions continues, et à support compact inclu dans  $I$  puisque  $\text{supp}(h) \subset \text{supp}(u) \cup \text{supp}(\psi)$ . De plus,

$$\int_{\text{supp}(h)} h(x)dx = \int_I h(x)dx = \int_I u(x)dx - \left( \int_I u(t)dt \right) \int_I \psi(x)dx = 0.$$

Ainsi,  $h$  admet une primitive à support compact. On déduit de (0.5) que

$$\int_I f(x) \left( u(x) - \left( \int_I u(t)dt \right) \psi(x) \right) dx = 0, \quad \forall u \in C_c(I),$$

i.e.,

$$\int_I f(x)u(x)dx - \int_I \int_I u(t)f(x)\psi(x)dtdx = 0, \quad \forall u \in C_c(I),$$

et par le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_I \left( f(x) - \left( \int_I f(t)\psi(t)dt \right) \right) u(x)dx = 0, \quad \forall u \in C_c(I).$$

En utilisant le Lemme 0.1, on obtient  $f(x) = \int_I f(t)\psi(t)dt$  p.p. sur  $I$ . Ainsi,  $f = C$  p.p. sur  $I$  avec  $C = \int_I f(t)\psi(t)dt$ .  $\square$

# CHAPITRE 1

## Espace de Sobolev en dimension un

Dans ce chapitre, on désignera par  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , non nécessairement borné, d'extrémités  $a$  et  $b$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ). On notera  $\bar{I}$  l'adhérence de  $I$  et  $\partial I$  sa frontière.

### 1.1 Dérivée faible

Pour motiver ce qui suit, rappelons la formule d'intégration par partie, pour  $u \in C^1(\bar{I})$

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = - \int_I u'(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I), \quad (1.1)$$

puisque le fait que le support de  $\phi$ ,  $\text{supp}(\phi)$ , soit un compact de  $]a, b[$  entraîne

$$[u(x)\phi(x)]_a^b = u(b)\phi(b) - u(a)\phi(a) = 0.$$

On remarque que la partie gauche de l'égalité (1.1) est bien définie même si  $u$  n'est pas régulier (il suffit que  $u$  soit dans  $L^1_{loc}(I)$ ). Cela mène à la définition suivante.

**Définition 1.1.1 (Dérivée faible).** Soit  $u \in L^1_{loc}(I)$ . On dit que  $g \in L^1_{loc}(I)$  est une dérivée faible de  $u$  si

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = - \int_I g(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I). \quad (1.2)$$

La principale indication de cette définition est que la dérivée faible d'une fonction est une fonction localement intégrable qui vérifie une formule d'intégration par parties. Le résultat suivant montre que cette dérivée faible est unique.

**Lemme 1.1.** *Quand elle existe, la dérivée faible d'une fonction  $u \in L^1_{loc}(I)$  est unique, à un ensemble de mesure nulle près.*

**Preuve.**

Supposons que  $g_1$  et  $g_2$  sont deux dérivées faibles de  $u$ . Alors

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = - \int_I g_1(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I),$$

et

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = - \int_I g_2(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Par conséquent

$$\int_I (g_1(x) - g_2(x))\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

En utilisant le Lemme 0.1, on déduit que  $g_1 - g_2 = 0$  p.p. dans  $I$ , i.e.  $g_1 = g_2$  p.p. dans  $I$ .  $\square$

*Remarque 1.1.1.* Par densité, on peut remplacer dans (1.4) " $\forall \phi \in C_c^1(I)$ " par " $\forall \phi \in \mathcal{D}(I)$ ".

**Notation.** On notera  $g = u'$ .

**Lemme 1.2.** *Soit  $g \in L^1_{loc}(I)$ . Pour  $y_0 \in I$  fixé, on pose*

$$u(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \quad x \in I.$$

*Alors  $u \in C(I)$  et  $g$  est la dérivée faible de  $u$ .*

**Preuve.**

On commence par montrer que  $u$  est continue. Fixons  $x \in I$  et soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $I$  qui converge vers  $x$ .

Pour tout  $n$  on a

$$\begin{aligned} |u(x_n) - u(x)| &= \left| \int_{y_0}^{x_n} g(t)dt - \int_{y_0}^x g(t)dt \right| \\ &= \left| \int_x^{x_n} g(t)dt \right| \\ &\leq \int_{\min(x, x_n)}^{\max(x, x_n)} |g(t)|dt \\ &= \int_I \mathbb{1}_{[\min(x, x_n), \max(x, x_n)]}(t) |g(t)|dt. \end{aligned}$$

Pour tout  $n$ , on pose  $g_n(t) = \mathbb{I}_{[\min(x, x_n), \max(x, x_n)]}(t)|g(t)|, \forall t \in I$ .

Montrons que  $g_n \rightarrow 0$  p. p. sur  $I$ .

Si  $t = x$ , alors, pour tout  $n$ ,  $x \in [\min(x, x_n), \max(x, x_n)]$ , et donc,  $g_n(x) = |g(x)|$ . Or, le singleton  $\{x\}$  est négligeable.

Si  $t \neq x$ , alors  $|t - x| > 0$ . Puisque  $(x_n)$  converge vers  $x$ ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

En particulier, pour  $\varepsilon = |t - x|$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < |t - x| \Rightarrow t \notin [\min(x, x_n), \max(x, x_n)] \Rightarrow g_n(t) = 0.$$

Par passage à la limite,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = 0$ .

Par conséquent,  $g_n \rightarrow 0$  p. p. sur  $I$ .

De plus, puisque  $(x_n)$  converge vers  $x$ , elle est bornée. Il existe donc  $c, d \in I$  avec  $c < d$ , tels que

$$A = \{x_n, ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset [c, d].$$

D'où, pour tout  $t \in I$ , on a

$$|g_n(t)| \leq \mathbb{I}_{[c, d]}(t)|g(t)|.$$

Comme  $g \in L^1_{loc}(I)$ , la fonction  $t \mapsto \mathbb{I}_{[c, d]}(t)|g(t)|$  est intégrable. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n(t) dt = 0.$$

Par le théorème d'encadrement, on obtient  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u(x_n) - u(x)| = 0$ , d'où  $u$  est continue en  $x$ . Comme  $x$  est arbitraire,  $u$  est continue sur  $I$ .

D'autre part, pour tout  $\phi \in C^1_c(I)$ , on a

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = \int_I \left( \int_{y_0}^x g(t)dt \right) \phi'(x)dx = - \int_a^{y_0} \left( \int_x^{y_0} g(t)\phi'(x)dt \right) dx + \int_{y_0}^b \left( \int_{y_0}^x g(t)\phi'(x)dt \right) dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} \int_I u(x)\phi'(x)dx &= - \int_a^{y_0} \left( \int_a^t g(t)\phi'(x)dx \right) dt + \int_{y_0}^b \left( \int_t^b g(t)\phi'(x)dx \right) dt \\ &= - \int_a^{y_0} g(t)(\phi(t) - \phi(a))dt + \int_{y_0}^b g(t)(\phi(b) - \phi(t))dt \\ &\stackrel{C^1_c}{=} - \int_a^{y_0} g(t)\phi(t)dt - \int_{y_0}^b g(t)\phi(t)dt \\ &= - \int_a^b g(t)\phi(t)dt \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

## 1.2 Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

### Définition 1.2.1 (Espaces de Sobolev).

1. Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . On désigne par l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(I)$ , l'ensemble des fonctions  $u \in L^p(I)$  telles qu'il existe une fonction  $g \in L^p(I)$  vérifiant

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = - \int_I g(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Autrement dit,

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); u \text{ a une dérivée faible } u' \in L^p(I)\}.$$

2. On pose  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$ .

*Remarque 1.2.1.* Il est possible de définir l'espace  $W^{1,p}(I)$  en utilisant le langage des distributions. En effet, toute fonction  $u \in L^p(I) \subset L^1_{loc}(I)$  peut être identifiée à un élément de l'espace des distributions  $\mathcal{D}'(I)$  (distribution régulière). Elle admet donc une dérivée au sens des distributions, laquelle appartient, a priori, à  $\mathcal{D}'(I)$ .

On dit que  $u \in W^{1,p}(I)$  si cette dérivée distributionnelle appartient à  $L^p(I)$ .

### Exemple 1.2.1.

1. Soit  $I = ]-1, 1[$  et on considère la fonction  $u$  définie sur  $I$  par  $u(x) = |x|$ . On a, pour tout  $p \in [1, +\infty[$

$$\|u\|_{L^p(I)}^p = \int_I |u(x)|^p dx = \int_I |x|^p dx = 2 \int_0^1 |x|^p dx = 2 \int_0^1 x^p dx = \frac{2}{p+1} < +\infty.$$

Pour  $p = +\infty$

$$\|u\|_{L^\infty(I)} = \inf\{\alpha; |u(x)| \leq \alpha \text{ p.p. sur } I\} = \inf\{\alpha; |x| \leq \alpha \text{ p.p. sur } I\} = 1 < +\infty.$$

Donc,  $u \in L^p(I)$ , pour tout  $p \in [1, +\infty]$ . Montrons que la fonction  $g$  définie sur  $I$  par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0, \end{cases}$$

## 1.2. Espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$

est sa dérivée faible. En effet, pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$  et en utilisant l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
 \int_I u(x)\phi'(x)dx &= \int_{-1}^1 u(x)\phi'(x)dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-x)\phi'(x)dx + \int_0^1 x\phi'(x)dx \\
 &= [(-x)\phi(x)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-1)\phi(x)dx + [x\phi(x)]_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx \\
 &= - \int_{-1}^0 (-1)\phi(x)dx - \int_0^1 \phi(x)dx \\
 &= - \int_I g(x)\phi(x)dx.
 \end{aligned}$$

Il est clair que  $g \in L^p(I)$ , donc  $u \in W^{1,p}(I)$ .

2. Soit  $I = ]0, 2[$  et on considère la fonction  $u$  définie sur  $I$  par

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x < 2, \end{cases}$$

On a, pour tout  $p \in [1, +\infty[$

$$\|u\|_{L^p(I)}^p = \int_I |u(x)|^p dx = \int_0^1 |x|^p dx + \int_1^2 dx = \frac{1}{p+1} + 1 < +\infty.$$

Pour  $p = +\infty$

$$\|u\|_{L^\infty(I)} = \inf\{\alpha; |u(x)| \leq \alpha \text{ p.p. sur } I\} = \inf\{\alpha; 1 \leq \alpha \text{ p.p. sur } I\} = 1 < +\infty.$$

Donc,  $u \in L^p(I)$ , pour tout  $p \in [1, +\infty]$ . D'autre part, pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$  et en utilisant l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}
 \int_I u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^2 u(x)\phi'(x)dx \\
 &= \int_0^1 x\phi'(x)dx + \int_1^2 \phi'(x)dx \\
 &= [x\phi(x)]_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx + [\phi(x)]_1^2 \\
 &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx + \phi(2) - \phi(1) \\
 &\stackrel{C_c^1}{=} - \int_0^1 \phi(x)dx = - \int_I g(x)\phi(x)dx,
 \end{aligned}$$

avec  $g$  est définie sur  $I$  par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2, \end{cases}$$

Il est clair que  $g \in L^p(I)$ , donc  $u \in W^{1,p}(I)$ .

3. Soit  $I = ]0, 2[$  et on considère la fonction  $u$  définie sur  $I$  par

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2, \end{cases}$$

Comme précédemment,  $u \in L^p(I)$ , pour tout  $p \in [1, +\infty]$ . D'autre part, pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$  et en utilisant l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \int_I u(x)\phi'(x)dx &= \int_0^2 u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 x\phi'(x)dx + \int_1^2 2\phi'(x)dx \\ &= [x\phi(x)]_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx + 2[\phi(x)]_1^2 \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx + 2(\phi(2) - \phi(1)) \\ &\stackrel{C_c^1}{=} - \int_0^1 \phi(x)dx - \phi(1) = - \int_I g(x)\phi(x)dx - \phi(1), \end{aligned}$$

Le terme supplémentaire  $-\phi(1)$  ne peut pas s'écrire sous la forme  $-\int_I g(x)\phi(x)dx$  avec une fonction  $g \in L^p(I)$ , car il correspond à la Delta de Dirac relative au point  $x = 1$ . En particulier, en choisissant une fonction test  $\phi \in C_c^1(I)$  telle que  $\phi(1) \neq 0$ , on obtient une contradiction.

Ainsi,  $u$  n'admet pas de dérivée faible appartenant à  $L^p(I)$  et par conséquent,  $u \notin W^{1,p}(I)$ .

**Lemme 1.3.** Soit  $u \in C^1(I)$  telle que  $u$  et sa dérivée au sens classique  $u'$  sont dans  $L^p(I)$ . Alors  $u \in W^{1,p}(I)$  et sa dérivée faible coïncide avec sa dérivée au sens classique.

En particulier, si  $I$  est borné, alors  $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ .

*Remarque 1.2.2.* Étant donné que l'intervalle  $I$  est ouvert, la continuité sur  $I$  n'implique aucune condition d'intégrabilité.

Dans le cas où  $I$  est borné et  $u \in C(\bar{I})$ , alors elle est automatiquement  $L^p$ -intégrable. Cependant, il convient de préciser que dire qu'une fonction continue est dans  $L^p(I)$  est une simplification qui signifie en réalité que la classe d'équivalence modulo l'égalité presque partout de cette fonction est un élément de  $L^p(I)$ . En d'autres termes, on considère une telle classe d'équivalence dont un représentant est une fonction continue.

*Remarque 1.2.3.* On peut montrer facilement que les fonctions continues et  $C^1$  par morceaux sur  $I$  borné appartiennent aux espaces de Sobolev  $W^{1,p}(I)$ .

**Preuve.**

Soit  $\phi \in C_c^1(I)$ . Par la formule d'intégration par parties classique (avec la dérivée au sens classique  $u'$ ) on a

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = [u(x)\phi(x)]_a^b - \int_I u'(x)\phi(x)dx = - \int_I u'(x)\phi(x)dx.$$

Donc  $u' \in L^p(I)$  est la dérivée faible de  $u$  et donc  $u \in W^{1,p}(I)$ .  $\square$

La dérivée faible est donc bien une notion de dérivée généralisée qui étend la notion classique à un cadre strictement plus général. En effet,

**Exemple 1.2.2.** Soit  $I = ]-1, 1[$  et on considère la fonction  $u$  définie sur  $I$  par  $u(x) = \max(0, x)$ .  $u$  appartient à  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $p$  mais n'est pas dérivable en 0. En effet, on a pour  $1 \leq p < +\infty$

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \end{cases}$$

alors  $u \in C(\bar{I})$ . Donc,  $u \in L^p(I)$ , pour tout  $p \in [1, +\infty]$ . D'autre part, pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$  et en utilisant l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned} \int_I u(x)\phi'(x)dx &= \int_{-1}^1 u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_0^1 x\phi'(x)dx \\ &= [x\phi(x)]_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx \\ &= \phi(1) - \int_0^1 \phi(x)dx \\ &\stackrel{C_c^1}{=} - \int_0^1 \phi(x)dx = - \int_I g(x)\phi(x)dx, \end{aligned}$$

avec  $g$  est définie sur  $I$  par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0, \end{cases}$$

et comme  $g \in L^p(I)$ , on a  $u \in W^{1,p}(I)$ . Cette fonction  $g$  s'appelle la fonction de Heaviside, on la note d'habitude  $H$ .

D'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{u(x) - u(0)}{x - 0} = 0.$$

Donc  $u \notin C^1(\bar{I})$ .

**Proposition 1.2.1.** *L'ensemble  $W^{1,p}(I)$  est un espace vectoriel, avec  $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$  au sens des dérivées faibles, pour tous  $u, v \in W^{1,p}(I)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Quand on le munit de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left( \|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{pour } 1 \leq p < +\infty,$$

ou pour  $p = +\infty$ ,

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(I)} = \max \left( \|u\|_{L^\infty(I)}, \|u'\|_{L^\infty(I)} \right)$$

*c'est un espace de Banach. Pour  $p = 2$ , l'espace  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_I (u(x)v(x) + u'(x)v'(x)) dx,$$

*et de la norme associée à ce produit scalaire*

$$\|u\|_{H^1(I)} = \|u\|_{W^{1,2}(I)} = \left( \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Preuve.**

L'ensemble  $W^{1,p}(I)$  est un sous ensemble de l'espace vectoriel  $L^p(I)$ . Il contient la fonction nulle, il suffit donc de vérifier qu'il est stable par combinaisons linéaires, ce qui est évident car par linéarité de l'intégrale, la linéarité de la dérivation faible est immédiate.

Le fait que  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}$  soit une norme sur  $W^{1,p}(I)$  découle du fait que  $\|\cdot\|_{L^p(I)}$  est une norme sur  $L^p(I)$ . En effet, les deux premières propriétés sont facile à vérifier. Pour montrer l'inégalité triangulaire, rappelons que d'après l'inégalité de Minkowski, pour  $a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$  dans  $\mathbb{R}_+$ , on a

$$\left( (a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( a_1^p + a_2^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( b_1^p + b_2^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il vient alors que, pour tout  $u, v \in W^{1,p}(I)$ , on a

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{1,p}(I)} &= \left( \|u + v\|_{L^p(I)}^p + \|u' + v'\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( (\|u\|_{L^p(I)} + \|v\|_{L^p(I)})^p + (\|u'\|_{L^p(I)} + \|v'\|_{L^p(I)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \|u\|_{L^p(I)}^p + \|v\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \|u'\|_{L^p(I)}^p + \|v'\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(I)} + \|v\|_{W^{1,p}(I)} \end{aligned}$$

### 1.3. Propriétés de $W^{1,p}(I)$

Montrons maintenant que  $W^{1,p}(I)$  est complet. Soit  $(u_n)_n$  une suite de Cauchy dans  $W^{1,p}(I)$ . Alors  $(u_n)_n$  et  $(u'_n)_n$  sont de Cauchy dans  $L^p(I)$ . Or, ce dernier est complet, donc  $u_n \rightarrow u$  et  $u'_n \rightarrow g$  dans  $L^p(I)$ , pour un certain  $u$  et un certain  $g$  de  $L^p(I)$ . Donc, pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$ , on a

$$\left| \int_I u_n(x) \phi'(x) dx - \int_I u(x) \phi'(x) dx \right| \leq \|u_n - u\|_{L^p(I)} \|\phi'\|_{L^q(I)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

et

$$\left| \int_I u'_n(x) \phi(x) dx - \int_I g(x) \phi(x) dx \right| \leq \|u'_n - g\|_{L^p(I)} \|\phi\|_{L^q(I)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Alors

$$\int_I u_n(x) \phi'(x) dx \rightarrow \int_I u(x) \phi'(x) dx \quad \text{et} \quad \int_I u'_n(x) \phi(x) dx \rightarrow \int_I g(x) \phi(x) dx \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Par définition, nous avons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\int_I u_n(x) \phi'(x) dx = - \int_I u'_n(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I),$$

et par passage à la limite, on obtient

$$\int_I u(x) \phi'(x) dx = - \int_I g(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Comme  $u$  et  $g$  sont dans  $L^p(I)$ , cela prouve que  $u \in W^{1,p}(I)$  avec  $g = u'$  et

$$u_n \rightarrow u \quad \text{dans } W^{1,p}(I).$$

Par conséquent,  $W^{1,p}(I)$  est complet.

Si  $p = 2$ , on montre facilement que

$$(u, v) \in H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \int_I (u(x)v(x) + u'(x)v'(x)) dx,$$

est un produit scalaire sur  $H^1(I)$  et que  $\|u\|_{H^1(I)}^2 = \langle u, u \rangle$  ce qui montre que  $H^1(I)$  est un espace de Hilbert. □

## 1.3 Propriétés de $W^{1,p}(I)$

### 1.3.1 Espaces de Sobolev et continuité

Les fonctions dans  $W^{1,p}(I)$  peuvent être regardées comme des primitives de fonctions de  $L^p(I)$ . Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 1.3.1 (Théorème d'immersion de Sobolev).** Soit  $u \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors il existe une fonction  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  tel que  $u = \tilde{u}$  p.p. dans  $I$  et

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(y) + \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

**Preuve.**

Soit  $y_0 \in I$  fixé et soit

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt, \quad \forall x \in \bar{I}.$$

Par le Lemme 1.2,  $\bar{u} \in C(\bar{I})$  et  $u'$  est sa dérivée faible et comme  $u'$  est la dérivée faible de  $u$ , on obtient

$$\int_I \bar{u}(x)\phi'(x)dx = - \int_I u'(x)\phi(x)dx = \int_I u(x)\phi'(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

D'où

$$\int_I (u(x) - \bar{u}(x))\phi'(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

En utilisant le Lemme 0.2, il existe une constante  $C$  telle que  $u = \bar{u} + C$  p.p. sur  $I$ . On pose  $\tilde{u} = \bar{u} + C$ , alors  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  et

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

□

*Remarque 1.3.1.* Pour mettre en évidence le contenu du Théorème 1.3.1, commençons par remarquer que si  $u \in W^{1,p}(I)$ , alors toutes les fonctions  $v$  telles que  $v = u$  p.p. dans  $I$  appartiennent aussi à  $W^{1,p}(I)$  (ceci est une conséquence directe de la définition de  $W^{1,p}(I)$ ). Le Théorème 1.3.1 affirme que toute fonction  $u \in W^{1,p}(I)$  admet un (et uniquement un) représentant continu sur  $\bar{I}$ , i.e. qu'il existe une fonction  $\tilde{u}$  continue sur  $\bar{I}$  et qui appartient à la classe d'équivalence de  $u$ . Quand nécessaire, nous remplacerons  $u$  par son représentant continu et, pour simplifier, nous utiliserons aussi la notation  $u$  pour le représentant continu.

**Corollaire 1.1.** Si  $p > 1$  et  $u \in W^{1,p}(I)$ , alors

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_{L^p(I)} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

**Preuve.**

Pour fixer les idées, considérons  $x, y \in I$  tels que  $y < x$ . Grâce au Théorème 1.3.1 et à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= \left| \int_y^x u'(t) dt \right| \\ &\leq \int_I |u'(t)| \mathbb{1}_{[y,x]}(t) dt \\ &\leq \|u'\|_{L^p(I)} \|\mathbb{1}_{[y,x]}\|_{L^q(I)} \\ &= \|u'\|_{L^p(I)} \left( \int_y^x dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|u'\|_{L^p(I)} |x - y|^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. □

### 1.3.2 Séparabilité

Rappelons d'abord deux résultats de topologie, le premier dit qu'un produit cartésien de deux espaces séparables est séparable (en effet, un produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable), et le second est le suivant :

**Lemme 1.4.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable et  $A \subset X$ . Alors  $A$  est séparable pour la distance induite.*

**Théorème 1.3.2.** *Si  $1 \leq p < +\infty$ , alors l'espace  $W^{1,p}(I)$  est séparable.*

**Preuve.**

Soit  $T : W^{1,p}(I) \rightarrow L^p(I) \times L^p(I)$  l'application définie par

$$T(u) = (u, u'), \quad u \in W^{1,p}(I).$$

Notons que  $T$  est une application linéaire et, en munissant  $L^p(I) \times L^p(I)$  de la norme produit

$$\|(u, v)\|_{L^p(I) \times L^p(I)} = \left( \|u\|_{L^p(I)}^p + \|v\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

on en déduit que  $T$  est continue et même une isométrie puisque pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$ ,

$$\|T(u)\|_{L^p(I) \times L^p(I)} = \left( \|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Donc  $T$  est une isométrie injective.

Par construction,  $Im(T) = T(W^{1,p}(I)) \subset L^p(I) \times L^p(I)$ . Or, d'après le Théorème 0.0.1,

$L^p(I) \times L^p(I)$  est séparable ce qui montre que  $Im(T)$  est également séparable. Comme  $W^{1,p}(I)$  est isomorphe à  $Im(T)$ , on en déduit que  $W^{1,p}(I)$  est séparable.  $\square$

*Remarque 1.3.2.* C'est évident que  $W^{1,\infty}(I)$  n'est pas séparable.

### 1.3.3 Réflexivité

Rappelons d'abord deux résultats suivants.

**Proposition 1.3.3.** *Soit  $E$  un espace réflexif et  $F$  un sous espace vectoriel fermé muni de la norme induite. Alors  $F$  est également réflexif.*

**Proposition 1.3.4.** *Si  $E_1$  et  $E_2$  sont réflexifs, alors  $E_1 \times E_2$  aussi.*

**Théorème 1.3.5.** *Si  $1 < p < +\infty$ , alors l'espace  $W^{1,p}(I)$  est réflexif.*

**Preuve.**

Soit  $T : W^{1,p}(I) \rightarrow L^p(I) \times L^p(I)$  l'application définie par

$$T(u) = (u, u'), \quad u \in W^{1,p}(I).$$

Puisque  $T$  est une isométrie, l'espace  $Im(T)$  est en fait un sous espace vectoriel fermé de  $L^p(I) \times L^p(I)$ . De plus,  $L^p(I) \times L^p(I)$  est réflexif d'après le Théorème 0.0.1 et la Proposition 1.3.4. Donc, grâce à la Proposition 1.3.3, on en déduit que  $Im(T)$  est réflexif. Comme  $W^{1,p}(I)$  est isomorphe à  $Im(T)$ , on en déduit que  $W^{1,p}(I)$  est réflexif.  $\square$

*Remarque 1.3.3.* C'est évident que ni  $W^{1,1}(I)$  ni  $W^{1,\infty}(I)$  ne sont réflexifs.

### 1.3.4 Quelques résultats de caractérisation

**Proposition 1.3.6.** *Soit  $u \in L^p(I)$  avec  $1 < p \leq +\infty$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.  $u \in W^{1,p}(I)$ .
2. Il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$\left| \int_I u(x) \phi'(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^q(I)}, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

De plus, nous pouvons prendre  $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ .

**Preuve.**

1.  $\Rightarrow$  2. Soit  $u \in W^{1,p}(I)$ . Alors, en utilisant l'inégalité de Hölder, pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$ , on a

$$\left| \int_I u(x)\phi'(x)dx \right| = \left| - \int_I u'(x)\phi(x)dx \right| \leq \int_I |u'(x)\phi(x)|dx \leq \|u'\|_{L^p(I)} \|\phi\|_{L^q(I)},$$

ce qui montre le résultat.

2.  $\Rightarrow$  1. Considérons la forme linéaire  $T : C_c^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par

$$\langle T, \phi \rangle = \int_I u(x)\phi'(x)dx, \quad \phi \in C_c^1(I).$$

Comme  $C_c^1(I)$  est un sous espace vectoriel de  $L^q(I)$ , par *ii*),  $T$  est continue sur  $C_c^1(I)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^q}$ . Donc, en appliquant le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue  $\bar{T} \in (L^q(I))'$  qui prolonge  $T$ , i.e.

$$\langle \bar{T}, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle = \int_I u(x)\phi'(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

D'autre part, d'après le théorème de représentation de Riesz (voir Théorème 0.0.1 4.), il existe  $f \in L^p(I)$  telle que

$$\langle \bar{T}, \phi \rangle = \int_I f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in L^q(I).$$

D'où, en particulier

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = \int_I f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

En posant  $g = -f$ , on a  $g \in L^p(I)$  et vérifie

$$\int_I u(x)\phi'(x)dx = - \int_I g(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I),$$

et donc  $u \in W^{1,p}(I)$ . □

**Proposition 1.3.7.** *Une fonction  $u \in L^\infty(I)$  appartient à  $W^{1,\infty}(I)$  si, et seulement si, il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \quad \text{pour p.t. } x, y \in I. \quad (1.3)$$

**Preuve.**

La première implication est une conséquence directe du Corollaire 1.1 (avec la convention  $\frac{1}{\infty} = 0$ ). Réciproquement, soit  $\phi \in C_c^1(I)$  tel que  $\text{supp}\phi \subset [N; M] \subset I$ . Pour  $h \in \mathbb{R}^*$  choisi tel que  $|h|$  suffisamment petit de sorte que  $[N+h, M+h] \subset ]a; b[$ , on a

$$\begin{aligned} \int_I u(x+h)\phi(x)dx &= \int_a^b u(x+h)\phi(x)dx \\ &= \int_N^M u(x+h)\phi(x)dx \\ &= \int_{N+h}^{M+h} u(x)\phi(x-h)dx \\ &= \int_a^{N+h} u(x)\phi(x-h)dx + \int_{N+h}^{M+h} u(x)\phi(x-h)dx \\ &\quad + \int_{M+h}^b u(x)\phi(x-h)dx \\ &= \int_a^b u(x)\phi(x-h)dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_I (u(x+h) - u(x))\phi(x)dx = \int_I u(x)(\phi(x-h) - \phi(x))dx. \quad (1.4)$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et (1.3), on obtient

$$\left| \int_I (u(x+h) - u(x))\phi(x)dx \right| \leq \int_I |u(x+h) - u(x)| |\phi(x)| dx \leq C|h| \int_I |\phi(x)| dx = C|h| \|\phi\|_{L^1(I)}.$$

Donc, par (1.4) on trouve

$$\left| \int_I u(x)(\phi(x-h) - \phi(x))dx \right| \leq C|h| \|\phi\|_{L^1(I)}.$$

On divise par  $|h|$

$$\left| \int_I u(x) \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h} dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^1(I)}. \quad (1.5)$$

Soit  $A > 0$  tel que  $[N-A, M+A] \subset I$ ; pour  $0 < |h| < A$ , on a alors

$$\int_I u(x) \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h} dx = \int_{N-A}^{M+A} u(x) \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h} dx. \quad (1.6)$$

Or

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h} = -\phi'(x), \quad \forall x \in [N-A, M+A].$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_I u(x) \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h} dx = -\int_I u(x)\phi'(x) dx, \quad \text{p.t. } x \in [N-A, M+A].$$

### 1.3. Propriétés de $W^{1,p}(I)$

Posons  $M = \|u\|_{L^\infty(I)} \sup_{x \in [N, M]} |\phi'(x)|$ ; on a  $M < +\infty$  car  $u \in L^\infty(I)$  et  $\phi'$  est continue sur le compact  $[N, M]$ , et par le Théorème des accroissements finis, pour tous  $x \in [N - A, M + A]$  et  $0 < |h| < A$ , il existe  $c$  entre  $x - h$  et  $x$  tel que

$$\frac{\phi(x - h) - \phi(x)}{h} = \phi'(c).$$

D'où

$$\left| u(x) \frac{\phi(x - h) - \phi(x)}{h} \right| \leq M,$$

qui est intégrable sur  $[N - A, M + A]$ . Donc le Théorème de convergence dominée nous dit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{N-A}^{M+A} u(x) \frac{\phi(x - h) - \phi(x)}{h} dx = - \int_{N-A}^{M+A} u(x) \phi'(x) dx.$$

Comme  $\phi'$  est nulle hors de  $[N - A, M + A]$ , par (1.6), on obtient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_I u(x) \frac{\phi(x - h) - \phi(x)}{h} dx = - \int_I u(x) \phi'(x) dx.$$

En passant à la limite dans (1.5), quand  $h \rightarrow 0$ , on en déduit que

$$\left| \int_I u(x) \phi'(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^1(I)}.$$

Le résultat est alors une conséquence de la Proposition 1.3.6 □

La version  $L^p$  du résultat précédent s'écrit comme suit.

**Proposition 1.3.8.** *Soit  $u \in L^p(\mathbb{R})$  avec  $1 < p < +\infty$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1.  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ .
2. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $h \in \mathbb{R}$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C|h|,$$

où  $\tau_h u(x) = u(x + h)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

De plus, on peut prendre  $C = \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$  dans 2..

**Preuve.**

1.  $\Rightarrow$  2.

Soit  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Par le Théorème 1.3.1, pour tout  $x, h \in \mathbb{R}$ , on a

$$u(x + h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt = h \int_0^1 u'(x + sh) ds,$$

. Donc

$$|u(x+h) - u(x)| = |h| \left| \int_0^1 u'(x+sh) ds \right| \leq |h| \int_0^1 |u'(x+sh)| ds.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)|^p &\leq |h|^p \left( \int_0^1 |u'(x+sh)| ds \right)^p \\ &\leq |h|^p \left( \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \right)^{\frac{p}{p}} \left( \int_0^1 1^q ds \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds. \end{aligned}$$

En intégrant, il vient que

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \right) dx = |h|^p \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx \right) ds.$$

En remarquant alors que

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy,$$

on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq |h|^p \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy \right) ds = |h|^p \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy.$$

D'où

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})} |h|.$$

2.  $\Rightarrow$  1.

Soit  $\phi \in C_c^1(I)$ . Pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} (u(x+h) - u(x)) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(x) (\phi(x-h) - \phi(x)) dx.$$

En utilisant alors l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (u(x+h) - u(x)) \phi(x) dx \right| \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C|h| \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

En divisant par  $h$  et en passant à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx \right| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h} dx \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \phi(x) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On peut alors utiliser la Proposition 1.3.6 une nouvelle fois et conclure. □

### 1.3.5 Prolongement continu

Certaines opérations fondamentales ne sont valables que pour les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier (par exemple, la convolution ou la transformée de Fourier). Il est alors utile de pouvoir prolonger une fonction  $u \in W^{1,p}(I)$  en une fonction  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Ceci est l'objet du résultat suivant.

**Théorème 1.3.9 (Opérateur de prolongement).** *Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . Il existe un opérateur de prolongement  $P : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$  linéaire et continu tel que*

1.  $(Pu)|_I = u$ , pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$  ;
2.  $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)}$ , pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$  ;
3.  $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ , pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$  où  $C > 0$  est une constante qui ne dépend que de  $\text{mes}(I)$ .

*Remarque 1.3.4.* On sait, par le Théorème 1.3.1, que toute  $u \in W^{1,p}(I)$  se prolonge en une fonction continue sur  $\bar{I}$ . En particulier toute  $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Si l'on pose  $\tilde{u}(x) = u(x)$  si  $x \in I$  et  $\tilde{u}(x) = 0$  si  $x \in \mathbb{R} \setminus I$ , on ne peut donc obtenir un élément de  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  que si  $u$  s'annule sur  $\partial I$ .

**Preuve.**

La preuve est divisée en deux parties.

Première partie. Commençons par le cas  $I = ]0, +\infty[$ . On pose

$$P(u) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \geq 0, \\ u(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Il est évident que  $(u^*)|_I = u$ , donc 1. est vérifiée. De plus

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} |u^*(x)|^p dx \\ &= \int_{-\infty}^0 |u(-x)|^p dx + \int_0^{\infty} |u(x)|^p dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} |u(x)|^p dx \\ &= 2\|u\|_{L^p(I)}^p. \end{aligned}$$

Ainsi  $u^* \in L^p(\mathbb{R})$  et

$$\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(I)},$$

et donc, 2. est satisfaite. D'autre part, si on pose

$$g(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{si } x > 0, \\ -u'(-x) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

comme précédemment, on a clairement que  $g \in L^p(\mathbb{R})$  et que

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(I)}.$$

De plus, en utilisant le Théorème 1.3.1, pour tout  $x \geq 0$  on a

$$u^*(x) - u^*(0) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t) dt = \int_0^x g(t) dt.$$

De même, pour  $x < 0$ , on a

$$u^*(x) - u^*(0) = u(-x) - u(0) = \int_0^{-x} u'(t) dt \stackrel{s=-t}{=} - \int_0^x u'(-s) ds = \int_0^x g(t) dt.$$

Par conséquent, en utilisant le Lemme 1.2, on déduit que  $g$  est la dérivée faible de  $u^*$  et donc  $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . De plus

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,p}(I)},$$

et 3. est satisfaite.

Deuxième partie. Considérons maintenant le cas d'un intervalle borné  $I$ . Sans perte de généralité, nous pouvons toujours nous ramener à l'intervalle  $I = ]0, 1[$ . Soit alors  $\eta$  une fonction de  $C^1(\mathbb{R})$  telle que

$$0 \leq \eta \leq 1$$

et

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{si } x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Tout élément  $u \in W^{1,p}(I)$  peut s'écrire sous la forme  $u = \eta_I u + (1 - \eta_I)u$ . L'idée est alors de prolonger  $\eta_I u$  et  $(1 - \eta_I)u$ .

Pour  $f$  une fonction définie sur  $]0, 1[$ , on pose

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Il est alors clair que

$$\begin{aligned}\widetilde{\eta|_I u}(x) &= \begin{cases} \eta|_I(x)u(x) & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \\ &= \eta(x) \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases} \\ &= \eta(x)\tilde{u}(x).\end{aligned}$$

De plus, pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$ , on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \widetilde{\eta|_I u}(x)\phi'(x)dx &= \int_0^\infty \eta|_I(x)u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_I \eta(x)u(x)\phi'(x)dx \\ &= \int_I u(x)((\eta(x)\phi(x))' - (\eta'(x)\phi(x)))dx \\ &= - \int_I u'(x)\eta(x)\phi(x)dx - \int_I u(x)\eta'(x)\phi(x)dx \quad (\text{car } (\eta\phi)|_I \in C_c^1(I)) \\ &= - \int_0^\infty (\eta(x)\tilde{u}'(x) + \eta'(x)\tilde{u}(x))\phi(x)dx.\end{aligned}$$

Autrement dit

$$(\widetilde{\eta|_I u})' = \eta\tilde{u}' + \eta'\tilde{u}.$$

D'autre part, on a

$$\|\widetilde{\eta|_I u}\|_{L^p(]0, \infty[)} = \|\eta|_I u\|_{L^p(I)} \leq \|\eta\|_\infty \|u\|_{L^p(I)} \leq \|u\|_{L^p(I)},$$

et

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{\eta|_I u})'\|_{L^p(]0, \infty[)} &= \|\eta\tilde{u}' + \eta'\tilde{u}\|_{L^p(]0, \infty[)} \\ &\leq \|\eta\tilde{u}'\|_{L^p(]0, \infty[)} + \|\eta'\tilde{u}\|_{L^p(]0, \infty[)} \\ &\leq \|\eta\|_\infty \|u'\|_{L^p(I)} + \|\eta'\|_\infty \|u\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|u'\|_{L^p(I)} + \|\eta'\|_\infty \|u\|_{L^p(I)},\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\widetilde{\eta|_I u}\|_{W^{1,p}(]0, \infty[)} \leq (2 + \|\eta'\|_\infty) \|u\|_{L^p(I)}.$$

En résumé,  $\widetilde{\eta|_I u} = \eta\tilde{u} \in W^{1,p}(]0, \infty[)$  est un prolongement de  $\eta|_I u$  à  $]0, +\infty[$ . Ainsi, en utilisant la première partie, On obtient une fonction  $w^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  vérifiant

$$w^*|_I = (\widetilde{\eta|_I u})|_I = \eta|_I u,$$

$$\|w^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\widetilde{\eta|_I u}\|_{L^p(]0,\infty[)} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(I)}$$

et

$$\|w^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|\widetilde{\eta|_I u}\|_{W^{1,p}(]0,\infty[)} \leq 2^{\frac{1}{p}} (2 + \|\eta'\|_\infty) \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

En procédant de manière analogue pour  $(1 - \eta|_I)u$ , on obtient une fonction  $w^{**} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  vérifiant

$$w|_I^{**} = (1 - \eta|_I)u,$$

$$\|w^{**}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(I)}$$

et

$$\|w^{**}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{1}{p}} (2 + \|\eta'\|_\infty) \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Finalement, on pose  $Pu = w^* + w^{**}$ . □

### 1.3.6 Densité des fonctions régulières

**Théorème 1.3.10.** *Soit  $1 \leq p < +\infty$  et  $I$  un intervalle borné, alors  $C^\infty(\bar{I})$  est dense dans  $W^{1,p}(I)$ .*

**Preuve.**

Soit  $u \in W^{1,p}(I)$  et on prend  $y_0 \in I$  fixé. Par le Théorème 1.3.1, pour tout  $x \in \bar{I}$ , on a

$$u(x) = u(y_0) + \int_{y_0}^x u'(t) dt.$$

D'après le Théorème 0.0.4, il existe une suite  $(g_n) \subset \mathcal{D}(I)$  telle que  $g_n \rightarrow u'$  dans  $L^p(I)$ . On pose alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \bar{I}$ ,

$$u_n(x) = u(y_0) + \int_{y_0}^x g_n(t) dt.$$

Donc,  $u_n \in C^\infty(\bar{I})$ . De plus, par construction,  $u'_n = g_n \rightarrow u'$  dans  $L^p(I)$ . Puisque  $I$  est borné, par l'inégalité de Hölder, il vient pour tout  $x \in \bar{I}$

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \int_I |u'_n(t) - u'(t)| dt \leq \text{mes}(I)^{\frac{1}{q}} \|u'_n - u'\|_{L^p(I)}.$$

D'où

$$\sup_{x \in \bar{I}} |u_n(x) - u(x)| \leq \text{mes}(I)^{\frac{1}{q}} \|u'_n - u'\|_{L^p(I)}.$$

Il suit que  $u_n \rightarrow u$  uniformément et donc dans  $L^p(I)$ . On en déduit bien que  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(I)$ . □

### 1.3. Propriétés de $W^{1,p}(I)$

---

*Remarque 1.3.5.* La densité n'a pas lieu pour  $p = \infty$ . En fait, l'adhérence de  $C^\infty(\bar{I})$  dans  $W^{1,\infty}(I)$  est  $C^1(\bar{I})$ . Or il y a dans tous les  $W^{1,p}(I)$  des fonctions qui ne sont pas de classe  $C^1$ , par exemple la fonction partie positive,  $x \mapsto u(x) = \max(0, x)$ . De même la fonction  $x \mapsto u(x) = |x|$  est dans  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , etc.

Dans ce qui suit, on va montrer que l'ensemble  $\{u|_I; u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$  est dense dans  $W^{1,p}(I)$  pour tout  $p \in [1; +\infty[$ . Pour cela, nous aurons besoin du résultat suivant.

**Lemme 1.5.** Soient  $\rho \in L^1(\mathbb{R})$  et  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  avec  $p \in [1, +\infty[$ .

Alors

$$\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\rho * u)' = \rho * u'.$$

**Preuve.**

1) **Cas où  $\rho \in C_c(\mathbb{R})$ .**

Supposons que  $\rho$  est à support compact. Alors, on sait que  $\rho * u \in L^p(\mathbb{R})$ .

Soit  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\rho * u)(x) \phi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} u(x) (\check{\rho} * \phi')(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) (\check{\rho} * \phi)'(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u'(x) (\check{\rho} * \phi)(x) dx \quad \check{\rho} * \phi \in C_c^1(\mathbb{R}) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (\rho * u')(x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

où  $\check{\rho}(x) = \rho(-x)$ . Alors  $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  et  $(\rho * u)' = \rho * u'$ .

2) Si  $\rho$  n'est pas à support compact, il existe une suite  $(\rho_n)_n \subset C_c(\mathbb{R})$  qui converge vers  $\rho$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ . D'après 1), on a  $\rho_n * u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  et  $(\rho_n * u)' = \rho_n * u'$ . D'autre part, on a

$$\|\rho_n * u - \rho * u\|_{L^p} = \|(\rho_n - \rho) * u\|_{L^p} \leq \|\rho_n - \rho\|_{L^1} \|u\|_{L^p}$$

et

$$\|\rho_n * u' - \rho * u'\|_{L^p} = \|(\rho_n - \rho) * u'\|_{L^p} \leq \|\rho_n - \rho\|_{L^1} \|u'\|_{L^p}.$$

D'où

$$\rho_n * u \rightarrow \rho * u \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}),$$

et

$$\rho_n * u' \rightarrow \rho * u' \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} (\rho_n * u)(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} (\rho_n * u')(x) \phi(x) dx.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} (\rho * u)(x) \phi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} (\rho * u')(x) \phi(x) dx.$$

Donc  $(\rho * u)' = \rho * u' \in L^p(\mathbb{R})$  et  $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . □

**Théorème 1.3.11.** *Soit  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  avec  $p \in [1, +\infty[$ . Alors il existe une suite  $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que*

$$u_n|_I \rightarrow u \quad \text{dans } W^{1,p}(I).$$

*En particulier,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ .*

**Preuve.**

On peut supposer que  $I = \mathbb{R}$ . Dans le cas contraire, on peut se ramener au cas de l'espace  $\mathbb{R}$  tout entier en utilisant le Théorème 1.3.9

- Soit  $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que

$$0 \leq \zeta \leq 1$$

et

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Soit  $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})$  avec  $p \in [1, +\infty[$ . Il est clair que

$$|\zeta_n(x)f(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta_n(x)f(x) = \zeta(0)f(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, il vient que la suite  $(\zeta_n f)_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ .

- Soit alors  $(\rho_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , une suite régularisante et soit

$$u_n = \zeta_n \cdot (\rho_n * u) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Nous allons montrer que la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ . En effet,

$$u_n - u = \zeta_n \cdot (\rho_n * u) - u = \zeta_n \cdot (\rho_n * u - u) + \zeta_n u - u,$$

et donc

$$\begin{aligned}
 \|u_n - u\|_{L^p} &\leq \|\zeta_n \cdot (\rho_n * u - u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\leq \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le lemme précédent, il vient que

$$u'_n = (\zeta_n \cdot (\rho_n * u))' = \zeta'_n \cdot (\rho_n * u) + \zeta_n \cdot (\rho_n * u)' = \zeta'_n \cdot (\rho_n * u) + \zeta_n \cdot (\rho_n * u').$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \|u'_n - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq \|\zeta'_n \cdot (\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n \cdot (\rho_n * u') - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\leq \|\zeta'_n \cdot (\rho_n * u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n \cdot (\rho_n * u' - u')\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\leq \frac{C}{n} \|\rho_n * u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\leq \frac{C}{n} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\rho_n * u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
 &\longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \max_{x \in \text{supp}(\zeta)} |\zeta'(x)|.$$

□

## 1.4 Injections de Sobolev

### 1.4.1 Injection continue

**Théorème 1.4.1.** *Il existe une constante  $C > 0$ , dépendant uniquement de  $\text{mes}(I) \leq +\infty$ , telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall p \in [1, +\infty]. \quad (1.7)$$

*Remarque 1.4.1.* L'inégalité avec les normes est interprétée comme une injection continue de  $W^{1,p}(I)$  dans  $L^\infty(I)$ . On note cela  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ .

**Preuve.**

On commence par montrer (1.7) pour  $I = \mathbb{R}$ . Le cas général s'en déduit grâce au théorème de prolongement (Théorème 1.3.9).

#### 1.4. Injections de Sobolev

---

Si  $p \in [1, +\infty[$ , soit  $v \in C_c^1(\mathbb{R})$  et notons  $G(s) = |s|^{p-1}s$ , alors  $G$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $G(0) = 0$  et

$$G'(s) = \left( (s^2)^{\frac{p-1}{2}} s \right)' = \frac{p-1}{2} 2s \cdot (s^2)^{\frac{p-1}{2}-1} \cdot s + (s^2)^{\frac{p-1}{2}} = (p-1)(s^2)^{\frac{p-1}{2}} + (s^2)^{\frac{p-1}{2}} = p|s|^{p-1}.$$

Donc, la fonction  $w = G \circ v : x \rightarrow G(v(x)) = |v(x)|^{p-1}v(x)$  appartient à  $C_c^1(\mathbb{R})$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$w'(x) = G'(v(x))v'(x) = p|v(x)|^{p-1}v'(x).$$

Soit  $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{supp}(v)$ , alors  $w(y_0) = G(0) = 0$  et

$$w(x) = \int_{y_0}^x p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} |v(x)|^p &= \left| |v(x)|^{p-1}v(x) \right|^p = |w(x)|^p \\ &= \left| \int_{y_0}^x p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt \right|^p \\ &\leq \int_{y_0}^x p|v(t)|^{p-1}|v'(t)|dt \\ &\leq p \left( \int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{q(p-1)}dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\mathbb{R}} |v'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

et donc, on obtient

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p \leq p \|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1} \|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq p \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}^{p-1} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = p \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}^p.$$

Ainsi,

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq p^{\frac{1}{p}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}). \quad (1.8)$$

Soit maintenant  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ , alors, par le Théorème 1.3.11, il existe une suite  $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$  convergeant vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ . De (1.8), pour tous  $n, m$ , on a

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}} \|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}, \quad (1.9)$$

et

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}} \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}.$$

Puisque la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ , elle est une suite de Cauchy dans cet espace. Donc, c'est aussi une suite de Cauchy dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  et elle converge donc vers  $u$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Passant à la limite dans (1.9), on obtient

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})},$$

ce qui donne le résultat.

Si  $p = \infty$ , alors trivialement

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}.$$

□

**Corollaire 1.2.** *Soit  $I$  un intervalle non borné et soit  $u \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p < +\infty$ . Alors, on a*

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow +\infty \\ x \in I}} u(x) = 0.$$

**Preuve.**

Soit  $u \in W^{1,p}(I)$  avec  $p \in [1, +\infty[$ . Par le Théorème 1.3.11, existe une suite  $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $(u_n|_I)_n$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(I)$ . En utilisant l'injection de  $W^{1,p}(I)$  dans  $L^\infty(I)$ , on déduit que

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, pour  $\varepsilon > 0$  fixé choisissons  $n$  suffisamment large de sorte que

$$\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \varepsilon.$$

Pour  $|x|$  suffisamment grand, nous savons que  $u_n(x) = 0$ . Il vient alors que  $|u(x)| < \varepsilon$ . D'où le résultat. □

**Corollaire 1.3 (Dérivation d'un produit, formule d'intégration par parties).**

*Soient  $u, v \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors on a  $uv \in W^{1,p}(I)$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$ .*

*De plus, on a la formule d'intégration par parties suivante*

$$\int_y^x u'(t)v(t)dt = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(t)v'(t)dt, \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

**Preuve.**

Premier cas.  $p \in [1, +\infty[$ . Notons que grâce au Théorème 1.4.1,  $u \in L^\infty(I)$  et donc

$$\begin{aligned} \|uv\|_{L^p(I)}^p &= \int_I |u(x)|^p |v(x)|^p dx \\ &\leq \int_I \|u\|_\infty^p |v(x)|^p dx \\ &= \|u\|_{L^\infty(I)}^p \|v\|_{L^p(I)}^p < +\infty. \end{aligned}$$

D'où  $uv \in L^p(I)$ .

Par le résultat de densité énoncé dans le Théorème 1.3.11, Il existe deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telles que

$$u_n|_I \rightarrow u \quad \text{dans } W^{1,p}(I) \quad \text{et} \quad v_n|_I \rightarrow v \quad \text{dans } W^{1,p}(I).$$

Grâce au Théorème 1.4.1, on a

$$\|u_n|_I - u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u_n|_I - u\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

et

$$\|v_n|_I - v\|_{L^\infty(I)} \leq C \|v_n|_I - v\|_{W^{1,p}(I)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|u_n v_n|_I - uv\|_{L^p(I)} &= \|(u_n|_I - u)(v_n|_I - v) + u(v_n|_I - v) + (u_n|_I - u)v\|_{L^p(I)} \\ &\leq (\|u_n|_I - u\|_{L^p(I)} + \|u\|_{L^p(I)}) \|v_n|_I - v\|_{L^\infty(I)} \\ &\quad + \|u_n|_I - u\|_{L^p(I)} \|v\|_{L^\infty(I)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{1.10}$$

De manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned} \|u'_n v_n|_I - u'v\|_{L^p(I)} &\leq (\|u'_n|_I - u'\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}) \|v_n|_I - v\|_\infty \\ &\quad + \|u'_n|_I - u'\|_{L^p(I)} \|v\|_{L^\infty(I)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{1.11}$$

et

$$\begin{aligned} \|u_n v'_{n|I} - uv'\|_{L^p(I)} &\leq (\|u_n|_I - u\|_{L^p(I)} + \|u\|_{L^p(I)}) \|v'_{n|I} - v'\|_\infty \\ &\quad + \|u_n|_I - u\|_{L^p(I)} \|v'\|_{L^\infty(I)} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{1.12}$$

D'autre part, on sait que

$$\int_I (u_n v_n)'(x) \phi(x) dx = \int_I (u'_n(x) v_n(x) + u_n(x) v'_n(x)) \phi(x) dx = - \int_I u_n(x) v_n(x) \phi'(x) dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

En prenant en compte (1.10), (1.11) et (1.12) et en passant à la limite dans l'égalité précédente, on déduit que

$$\int_I (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \phi(x) dx = - \int_I u(x)v(x) \phi'(x) dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Il en résulte que  $uv \in W^{1,p}(I)$  avec  $(uv)' = u'v + uv'$  et donc

$$(uv)(x) - (uv)(y) = \int_y^x (uv)'(t) dt = \int_y^x (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) dt, \quad \forall x, y \in \bar{I},$$

ce qui donne la formule d'intégration par parties énoncée.

Deuxième cas.  $p = +\infty$

Supposons que  $u, v \in W^{1,\infty}(I)$ . Alors, il est facile de voir que  $uv \in L^\infty(I)$  et  $u'v + uv' \in L^\infty(I)$ . Il reste à vérifier que  $u'v + uv'$  est la dérivée faible de  $uv$ .

Soit  $\phi \in C_c^1(I)$ . Alors, il existe un intervalle ouvert borné  $J \subset I$  tel que  $\text{supp}(\phi) \subset J$ . Donc, pour tout  $p \in [1, +\infty[$  on a

$$\|u\|_{W^{1,p}(J)} \leq \text{mes}(J)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,\infty}(J)} \leq \text{mes}(J)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{W^{1,\infty}(I)}.$$

On déduit que  $u \in W^{1,p}(J)$ . De la même manière,  $v \in W^{1,p}(J)$  et d'après ce qui précède, il vient que

$$\int_J (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \phi(x) dx = - \int_J u(x)v(x) \phi'(x) dx,$$

i. e.,

$$\int_I (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) \phi(x) dx = - \int_I u(x)v(x) \phi'(x) dx,$$

Ceci termine la preuve. □

**Corollaire 1.4 (Dérivation d'un produit de composition).**

Soit  $G \in C^1(\mathbb{R})$  tel que  $G(0) = 0$  et soit  $u \in W^{1,p}(I)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors  $G \circ u \in W^{1,p}(I)$  et  $(G \circ u)' = (G' \circ u)u'$ .

**Preuve.**

D'après le Théorème 1.4.1, on sait que  $u \in L^\infty(I)$ . Posons alors  $M = \|u\|_\infty$ . Comme

$$G(s) = G(0) + \int_0^s G'(t)dt = \int_0^s G'(t)dt,$$

on obtient

$$|G(s)| = \left| \int_0^s G'(t)dt \right| \leq C|s|, \quad \forall s \in [-M, M],$$

où  $C = \max_{s \in [-M, M]} |G'(s)|$ . Vu que  $u(x) \in [-M, M]$ , nous déduisons que

$$|G \circ u(x)| = |G(u(x))| \leq C|u(x)| \quad \text{p.p. dans } I,$$

et donc  $G \circ u \in L^p(I)$ . De la même manière, nous avons

$$|((G' \circ u)u')(x)| = |G'(u(x))u'(x)| = |G'(u(x))||u'(x)| \leq C|u'(x)| \quad \text{p.p. dans } I,$$

et donc  $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$ . Il reste à vérifier que

$$\int_I (G \circ u)(x)\phi'(x)dx = - \int_I (G'(u(x))u'(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

• Supposons que  $1 \leq p < +\infty$ . Alors d'après le Théorème 1.3.11, il existe une suite  $(u_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que  $(u_n|_I)_n$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(I)$ . Le Théorème 1.4.1 implique que cette suite converge aussi dans  $L^\infty(I)$ . La continuité uniforme de  $G$  et  $G'$  dans des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$  implique alors que

$$G \circ u_n|_I \rightarrow G \circ u \quad \text{dans } L^\infty(I) \tag{1.13}$$

et

$$G' \circ u_n|_I \rightarrow G' \circ u \quad \text{dans } L^\infty(I)$$

Par conséquent

$$(G' \circ u_n|_I)u'_n|_I \rightarrow (G' \circ u)u' \quad \text{dans } L^p(I). \tag{1.14}$$

D'autre part, on sait que

$$\int_I (G \circ u_n)'(x)\phi(x)dx = \int_I (G' \circ u_n)(x)u'_n(x)\phi(x)dx = - \int_I (G \circ u_n)(x)\phi'(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^1(I).$$

Le résultat vient en passant à la limite dans l'égalité précédente et en utilisant (1.13) et (1.14).

• Le cas  $p = +\infty$  peut-être obtenu en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du corollaire précédent.  $\square$

## 1.4.2 Injection compacte

**Théorème 1.4.2.** *Si  $I$  est borné, alors*

1. *L'injection  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$  est compacte pour tout  $1 < p \leq +\infty$ .*
2. *L'injection  $W^{1,1}(I) \hookrightarrow L^p(I)$  est compacte pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .*

Afin de montrer ce résultat, nous aurons besoin des théorèmes suivants.

**Théorème 1.4.3 (d'Ascoli-Arzelà).** *Soit  $K$  un espace métrique compact et soit  $H$  une partie bornée dans  $C(K)$  (l'espace des fonctions continues définies sur  $K$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ). Supposons que  $H$  est (uniformément) équicontinue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } \forall x_1, x_2 \in K, d(x_1, x_2) < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall f \in H.$$

*Alors la fermeture de  $H$  dans  $C(K)$  est compacte.*

**Théorème 1.4.4 (de Fréchet-Kolmogorov).** *Soit  $F$  un ensemble borné dans  $L^p(\mathbb{R})$  avec  $1 \leq p < +\infty$ . Supposons que*

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad \text{uniformément en } f \in F,$$

*i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que } \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon, \quad \forall f \in F, \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad \text{avec } |h| < \delta.$$

*Alors la fermeture de  $F|_A$  dans  $L^p(A)$  est compacte pour tout ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  mesurable tel que  $\text{mes}(A) < +\infty$  (ici  $F|_A$  désigne l'ensemble des restrictions à  $A$  des fonctions dans  $F$ ).*

**Preuve du Théorème 1.4.2.**

1. Soit  $F$  la boule unité de  $W^{1,p}(I)$  avec  $p \in ]1, +\infty]$ . Grâce au Corollaire 1.1, on a pour  $f \in F$

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_{L^p} |x - y|^{1 - \frac{1}{p}} \leq |x - y|^{1 - \frac{1}{p}}, \quad \forall x, y \in I.$$

D'après le Théorème 1.4.3, il vient que  $\bar{F}$  est compacte dans  $C(\bar{I})$ .

2. Soit  $H$  la boule unité dans  $W^{1,1}(I)$ . Soit  $P$  l'opérateur de prolongement du Théorème 1.3.9 et soit  $F = P(H)$ , (i.e.  $H = F|_I$ ), alors

$$\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} \leq C\|f|_I\|_{W^{1,1}(I)} \leq C, \quad \forall f \in F,$$

et d'après le Théorème 1.4.1, il vient que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}}\|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})} \leq e^{\frac{1}{e}}C := C_1, \quad \forall f \in F.$$

De plus, grâce à la Proposition 1.3.8, on obtient

$$\|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |h|\|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C|h|, \quad \forall f \in F.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\mathbb{R}} |\tau_h f(x) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |\tau_h f(x) - f(x)|^{p-1} |\tau_h f(x) - f(x)| dx \\ &\leq \|\tau_h f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-1} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq (\|\tau_h f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} - \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{p-1} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= (2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})})^{p-1} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq (2C_1)^{p-1} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq (2C_1)^{p-1} C|h|, \quad \forall f \in F, \end{aligned}$$

et donc

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_2|h|^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in F,$$

où  $C_2 > 0$  est une constante indépendante de  $f$ . Le résultat est alors une conséquence du Théorème 1.4.4.

□

## 1.5 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(I)$

**Définition 1.5.1.** Soit  $m \geq 2$  un entier et soit  $p \in [1, +\infty]$ . On définit par récurrence l'espace

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) \mid u' \in W^{m-1,p}(I)\},$$

## 1.6. Dualité et convergence faible

---

et on pose  $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ .

On peut facilement vérifier que  $u \in W^{m,p}(I)$  si, et seulement si,  $u$  et ses dérivées faibles successives  $u', \dots, u^{(m)}$  existent et appartiennent à  $L^p(I)$ . L'espace  $W^{m,p}(I)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(I)},$$

ou encore, si  $1 \leq p < +\infty$ , de la norme équivalente définie par

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \left( \|u\|_{L^p(I)}^p + \sum_{j=1}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace  $H^m(I) = W^{m,2}(I) = \{u \in L^2(I) \mid u^{(j)} \in L^2(I), \forall j = 1, \dots, m\}$  est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^m \langle u^{(j)}, v^{(j)} \rangle_{L^2}$$

et de la norme associée à ce produit scalaire et donnée par

$$\|u\|_{H^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^m}} = \left( \|u\|_{L^2(I)}^2 + \sum_{j=1}^m \|u^{(j)}\|_{L^2(I)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 1.6 Dualité et convergence faible

Commençons par cerner un peu mieux le dual de  $W^{1,p}(I)$ .

**Théorème 1.6.1.** Soit  $1 \leq p < +\infty$  et  $L \in (W^{1,p}(I))'$ , alors il existe des fonctions  $f$  et  $g \in L^q(I)$  telles que, pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$ ,

$$L(u) = \int_I (f(x)u(x) + g(x)u'(x))dx.$$

**Preuve.**

On considère l'application

$$\theta : W^{1,p}(I) \rightarrow L^p(I) \times L^p(I), \quad \theta(u) = (u, u'),$$

qui est linéaire, continue et injective. Son image est notée

$$F = \text{Im}(\theta) \subset L^p(I) \times L^p(I).$$

L'application  $\theta$  est une isométrie sur  $F$  pour la norme produit

$$\|(u, v)\|_{L^p(I) \times L^p(I)} = \left( \|u\|_{L^p(I)}^p + \|v\|_{L^p(I)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ainsi, pour tout  $L \in (W^{1,p}(I))'$ , la forme linéaire  $T = L \circ \theta^{-1}$  est un élément de  $F'$ .

Par le théorème de Hahn-Banach, on peut étendre  $T$  en une forme linéaire continue  $\tilde{T} \in (L^p(I) \times L^p(I))'$ .

On définit alors deux formes linéaires sur  $L^p(I)$  par :

$$T_1(u) = \tilde{T}(u, 0) \quad u \in L^p(I), \quad T_2(v) = \tilde{T}(0, v) \quad v \in L^p(I).$$

Par linéarité, pour tout  $(u, v) \in L^p(I) \times L^p(I)$ , on a

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v),$$

d'où

$$\tilde{T}(u, v) = \tilde{T}(u, 0) + \tilde{T}(0, v) = T_1(u) + T_2(v).$$

On remarque que  $T_1$  et  $T_2$  sont des formes linéaires continues sur  $L^p(I)$ . Par le théorème de Riesz (voir Théorème 0.0.1), il existe  $f, g \in L^q(I)$  tels que, pour tout  $u, v \in L^p(I)$ ,

$$T_1(u) = \int_I f(x)u(x) dx, \quad T_2(v) = \int_I g(x)v(x) dx.$$

Ainsi, pour tout  $(u, v) \in L^p(I) \times L^p(I)$ ,

$$\tilde{T}(u, v) = \int_I f(x)u(x) dx + \int_I g(x)v(x) dx = \int_I (f(x)u(x) + g(x)v(x)) dx.$$

Enfin, pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$ ,

$$L(u) = T(u, u') = \tilde{T}(u, u') = \int_I (f(x)u(x) + g(x)u'(x)) dx.$$

□

*Remarque 1.6.1.* Attention, ceci n'est pas une identification du dual de  $W^{1,p}(I)$  au sens où l'on entend usuellement identification. En effet, il n'y a pas unicité du couple  $(f, g)$  qui sert à représenter  $L$ . Il y en a en fait une infinité.

Cette caractérisation du dual permet néanmoins de décrire précisément la convergence faible dans  $W^{1,p}(I)$ .

**Proposition 1.6.2.** *Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Alors une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $W^{1,p}(I)$  converge faiblement vers  $u$  dans  $W^{1,p}(I)$  si et seulement si*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{et} \quad u'_n \rightharpoonup u' \quad \text{dans } L^p(I).$$

**Preuve.**

Supposons que  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $W^{1,p}(I)$ . Comme, pour tout  $f \in L^q(I)$ , les applications

$$u \mapsto \int_I f(x)u(x)dx \quad \text{et} \quad u \mapsto \int_I f(x)u'(x)dx$$

définissent des formes linéaires continues sur  $W^{1,p}(I)$ , on en déduit que

$$\int_I f(x)u_n(x)dx \rightarrow \int_I f(x)u(x)dx \quad \text{et} \quad \int_I f(x)u'_n(x)dx \rightarrow \int_I f(x)u'(x)dx,$$

ce qui montre que  $u_n \rightharpoonup u$  et  $u'_n \rightharpoonup u'$  dans  $W^{1,p}(I)$ . Réciproquement,  $L \in (W^{1,p}(I))'$ . D'après le Théorème 1.6.1, on peut trouver des fonctions  $f$  et  $g \in L^q(I)$  telles que, pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$ ,

$$L(u) = \int_I (f(x)u(x) + g(x)u'(x))dx.$$

Par conséquent, si  $u_n \rightharpoonup u$  et  $u'_n \rightharpoonup u'$  dans  $W^{1,p}(I)$ , alors en particulier,

$$L(u_n) = \int_I (f(x)u_n(x) + g(x)u'_n(x))dx \rightarrow \int_I (f(x)u(x) + g(x)u'(x))dx = L(u),$$

ce qui montre que  $u_n \rightharpoonup u$  dans  $W^{1,p}(I)$ . □

## 1.7 Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(I)$

### 1.7.1 Définition et caractérisation

Nous allons à présent nous intéresser à un sous-espace de  $W^{1,p}(I)$  qui joue un rôle important dans l'études des équations aux dérivées partielles.

**Définition 1.7.1.** *Pour  $1 \leq p < +\infty$ , on désigne par  $W_0^{1,p}(I)$  la fermeture de  $\mathcal{D}(I)$  dans  $W^{1,p}(I)$*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{\mathcal{D}(I)} \quad \text{dans} \quad W^{1,p}(I).$$

On note  $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ .

Par construction,  $W_0^{1,p}(I)$  est un sous espace vectoriel fermé dans  $W^{1,p}(I)$ . On peut munir  $W_0^{1,p}(I)$  de la norme induite par  $W^{1,p}(I)$ , ce qui lui donne une structure d'espace de Banach séparable. De plus, il est réflexif si  $p > 1$ .

*Remarque 1.7.1.* Prenant en compte le Théorème 1.3.11, il vient que  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  et donc  $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 1.7.1.** *Si  $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$ , alors  $u \in W_0^{1,p}(I)$ .*

Le résultat suivant nous donne une caractérisation très utile de l'espace  $W_0^{1,p}(I)$ .

**Théorème 1.7.2.** *Soit  $u \in W^{1,p}(I)$ . Alors*

$$u \in W_0^{1,p}(I) \iff u = 0 \quad \text{sur } \partial I.$$

**Preuve.**

Si  $u \in W_0^{1,p}(I)$ , alors il existe une suite  $(u_n)_n \subset \mathcal{D}(I)$  telle que  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ . Par conséquent, la convergence est uniforme, et comme  $u_n = 0$  sur  $\partial I$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il vient que  $u = 0$  sur  $\partial I$ .

Réciproquement, soit  $u \in W^{1,p}(I)$  tel que  $u = 0$  sur  $\partial I$ . Soit  $G \in C^\infty(I)$  une fonction telle que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \leq 1 \\ t & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases}$$

et

$$|G(t)| \leq |t|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit alors  $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ . D'après le Corrolaire 1.4,  $u_n \in W^{1,p}(I)$ . De plus, il est facile de voir que

$$\text{supp}(u_n) \subset \left\{ x \in I; |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

En sachant que  $u = 0$  sur  $\partial I$  et que  $u(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ ,  $x \in I$ , on déduit de l'inclusion précédente que  $\text{supp}(u_n)$  est borné, et donc compact. Ainsi  $u_n \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I) \subset W_0^{1,p}(I)$ .

Observant que

$$|u_n(x) - u(x)| = \begin{cases} |u(x)| & \text{si } |u(x)| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |u(x)| \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$

il vient que

$$|u_n(x) - u(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall x \in I.$$

De plus,

$$|u_n(x) - u(x)| \leq |u_n(x)| + |u(x)| \leq \frac{1}{n}|nu(x)| + |u(x)| = 2|u(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\|u_n - u\|_{L^p(I)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De même, vu que

$$|u'_n(x) - u'(x)| = |(G'(nu(x)) - 1)u'(x)| = \begin{cases} |u'(x)| & \text{si } |u(x)| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |u(x)| > \frac{2}{n} \end{cases}$$

il vient que

$$|u'_n(x) - u'(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad p.t. x \in I.$$

De plus,

$$|u'_n(x) - u'(x)| \leq (\|G'\|_{C([0,2])} + 1)|u'(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\|u'_n - u'\|_{L^p(I)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi la suite  $(u_n)_n$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(I)$  et donc  $u \in W_0^{1,p}(I)$ . □

## 1.7.2 Inégalité de Poincaré

**Théorème 1.7.3.** *Supposons que  $I = ]a, b[$  est borné.*

1. *Il existe une constante  $C_P > 0$  qui dépend de  $\text{mes}(I)$  telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C_P \|u'\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

2. *Sur  $W_0^{1,p}(I)$ , la norme  $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$  définie par*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|u'\|_{L^p},$$

est équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ . En particulier, sur  $H_0^1(I)$ , le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$  défini par

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_a^b u'(x)v'(x)dx$$

est équivalent au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ .

**Preuve.**

1. Soit  $u \in W_0^{1,p}(I)$ . Alors, pour tout  $x \in I$ , on a

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)dt = \int_a^x u'(t)dt,$$

et donc

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'(t)|dt \leq \int_I |u'(t)|dt \tag{1.15}$$

En combinant (1.15) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|u(x)| \leq \text{mes}(I)^{\frac{1}{q}} \|u'\|_{L^p}, \quad \forall x \in I, \tag{1.16}$$

et par conséquent

$$|u(x)|^p \leq \text{mes}(I)^{\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p, \quad \forall x \in I,$$

En intégrant dans  $I$ , nous obtenons

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_I |u(x)|^p dx \leq \int_I \text{mes}(I)^{\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p dx = \text{mes}(I)^{1+\frac{p}{q}} \|u'\|_{L^p}^p = \text{mes}(I)^p \|u'\|_{L^p}^p,$$

et donc

$$\|u\|_{L^p} \leq \text{mes}(I) \|u'\|_{L^p} = (b-a) \|u'\|_{L^p},$$

ce qui donne le résultat.

2. Il est clair que  $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$  est une semi-norme sur  $W_0^{1,p}(I)$ . En effet, la deuxième et la troisième propriété (homogénéité et inégalité triangulaire) sont une conséquence directe des propriétés de la norme  $\|\cdot\|_{L^p}$ . L'inégalité (1.16) montre que c'est en fait une norme car elle ne s'annule que sur le vecteur nul.

Pour l'équivalence, on note que pour tout  $u \in W_0^{1,p}(I)$ ,

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} = \|u'\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{1,p}}.$$

D'autre part, l'inégalité de Poincaré montre que

$$\|u\|_{W^{1,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p \leq ((b-a)^p + 1) \|u'\|_{L^p}^p,$$

ce qui établit que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C \|u'\|_{L^p},$$

et donc le fait que les normes  $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$  et  $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$  sont équivalentes.

Dans le cas  $p = 2$ , la norme  $\|\cdot\|_{H_0^1}$  est manifestement induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1}$ .

□

### 1.7.3 Espace dual de $W_0^{1,p}(I)$

*Remarque 1.7.2.* Le théorème de représentation de Riez-Fréchet affirme qu'il existe une isométrie canonique d'un espace de Hilbert  $H$  sur son dual. On le fait souvent, mais pas toujours.

Voici une situation typique - qui apparaît dans de nombreuses applications - où il faut être prudent avec les identifications : On suppose que  $H$  est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$  et d'une norme associée  $|\cdot|$ . On suppose que  $V \subset H$  est un sous-espace vectoriel dense dans  $H$ . On suppose que  $V$  possède sa propre norme  $\|\cdot\|_V$ , et que  $V$  est un espace de Banach avec cette norme. On suppose aussi que l'injection  $V \hookrightarrow H$  est continue, c'est-à-dire :

$$|v| \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

(Par exemple,  $H = L^2(]0, 1[)$  et  $V = L^p(]0, 1[)$  avec  $p > 2$ , ou bien  $V = C([0, 1])$ .)

Il existe une application canonique  $T : H' \rightarrow V'$ , qui consiste simplement à restreindre les formes linéaires continues  $\varphi$  définies sur  $H$  à l'espace  $V$ . Autrement dit :  $\langle T\varphi, v \rangle_{V',V} = \langle \varphi, v \rangle_{H',H}$ ,  $\forall v \in V$ . Il est facile de voir que  $T$  possède les propriétés suivantes :

1.  $\|T\varphi\|_{V'} \leq C \|\varphi\|_{H'} \quad \forall \varphi \in H'$ ,
2.  $T$  est injective,
3. L'image de  $T$ ,  $Im(T)$ , est dense dans  $V'$  si  $V$  est réflexif.

En identifiant  $H$  avec  $H'$  et en utilisant  $T$  comme plongement canonique de  $H$  dans  $V'$ , on écrit souvent :

$$V \subset H \simeq H' \subset V' \tag{1.17}$$

où toutes les injections sont continues et denses (à condition que  $V$  soit réflexif). On dit alors que  $H$  est l'espace pivot. À noter : les produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$  et  $(\cdot, \cdot)$  coïncident chaque fois qu'ils ont tous les deux un sens, c'est-à-dire :

$$\langle f, v \rangle_{V',V} = (f, v) \quad \forall f \in H, \forall v \in V.$$

La situation devient plus délicate si  $V$  est lui-même un espace de Hilbert, avec son propre produit scalaire  $((\cdot, \cdot))$  associé à la norme  $\|\cdot\|_V$ . On pourrait bien sûr identifier  $V$  à son dual  $V'$  en utilisant ce produit scalaire  $((\cdot, \cdot))$ . Cependant, dans ce cas, l'inclusion (1.17) n'a plus de sens : elle devient absurde. Il faut faire un choix. L'usage le plus courant est d'identifier  $H$  à son dual  $H'$ , d'écrire (1.17), et de ne pas identifier  $V$  à  $V'$ . (Bien entendu, il existe encore une isométrie entre  $V$  et  $V'$ , mais elle n'est pas considérée comme l'application identité.)

**Notation.** L'espace dual de  $W_0^{1,p}(I)$  (avec  $1 \leq p < \infty$ ) est noté par  $W^{-1,q}(I)$ , et dans le cas  $p = 2$ , le dual de  $H_0^1(I)$  est noté par  $H^{-1}(I)$ .

Conformément à la remarque précédente, on identifie  $L^2(I)$  avec son dual, mais on n'identifie pas  $H_0^1(I)$  avec son dual. On a les inclusions suivantes :

$$H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I) = (L^2(I))' \hookrightarrow H^{-1}(I),$$

où ces injections sont continues et denses (c'est à dire à image dense).

Grâce au Théorème 1.4.1, il vient que si  $I$  est borné, alors

$$W_0^{1,p}(I) \hookrightarrow L^2(I) = (L^2(I))' \hookrightarrow W^{-1,q}(I), \quad \forall p \in [1, +\infty[,$$

avec des injections continues (et denses lorsque  $1 < p < \infty$ ).

Si  $I$  est non borné, on a seulement

$$W_0^{1,p}(I) \hookrightarrow L^2(I) = (L^2(I))' \hookrightarrow W^{-1,q}(I), \quad \forall p \in [1, 2],$$

avec des injections continues.

Par le Théorème 1.6.1, les éléments de  $W^{-1,q}(I)$  peuvent être représentés à l'aide de fonctions de  $L^p(I)$ . On a le résultat suivant

**Théorème 1.7.4.** Soit  $1 \leq p < +\infty$  et  $L \in W^{-1,q}(I)$ , alors il existe des fonctions  $f$  et  $g \in L^q(I)$  telles que, pour tout  $u \in W^{1,p}(I)$ ,

$$L(u) = \int_I (f(x)u(x) + g(x)u'(x))dx$$

et

$$\|L\|_{W^{-1,q}} = \max(\|f\|_{L^q}, \|g\|_{L^q}).$$

Quand  $I$  est borné, on peut prendre  $f = 0$ .

## 2.1 Problème variationnel et théorème de Lax-Milgram

Comme on le verra plus loin, les formulations variationnelles de la plupart des problèmes aux limites que l'on aura à considérer s'écrivent sous la forme générale suivante

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.1)$$

où  $V$  est un espace de Hilbert dont la norme et le produit scalaire seront notés  $\|\cdot\|_V$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  respectivement.

Les hypothèses sur  $a$  et  $F$  sont comme suit.

1.  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire.
2.  $a$  est continue, c'est à dire qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall (u, v) \in V \times V.$$

3.  $a$  est coercive, c'est à dire qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

4.  $F$  est une forme linéaire et continue sur  $V$  (i.e.  $F$  est un élément de  $V'$ , espace dual de  $V$ ).

Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram sont ainsi réunies et permettent d'établir l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnel (2.1). Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $V$  un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $V$  et  $F$  une forme linéaire et continue sur  $V$ . Alors le problème variationnel (2.1) admet une unique solution  $u \in V$ . De plus, on a l'estimation a priori suivante*

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'},$$

où  $\alpha > 0$  est la constante de coercivité de  $a$ .

Si  $a$  est symétrique, alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in V \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = \min_{v \in V} \left( \frac{1}{2}a(v, v) - F(v) \right).$$

## 2.2 Problème avec des conditions au limites de type Dirichlet

### 2.2.1 Formulation faible

Soit  $I = ]a, b[$  borné et considérons l'équation aux limites donnée par

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{dans } I, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $c \in L^\infty(I)$  et  $f \in L^2(I)$ .

La condition aux limites  $u(a) = u(b) = 0$  s'appelle la condition de Dirichlet (homogène).

**Définition 2.2.1 (Solution classique).** *On suppose que  $c \in C(\bar{I})$  et  $f \in C(\bar{I})$ . On appelle solution classique de (2.2) une fonction  $u \in C^2(\bar{I})$  qui satisfait (2.2).*

L'existence d'une solution classique n'est en générale pas garantie (si par exemple les données  $c$  et  $f$  ne sont pas suffisamment régulières) et nous avons besoin de donner un autre sens à notre solution et de la chercher dans un cadre plus large (ce qui, a priori,

nous donne plus de "chance" d'en trouver). Le principe de l'approche variationnelle est de remplacer l'équation (2.2) par une formulation obtenue en intégrant cette équation multipliée par une fonction-test quelconque. Utilisant des intégrations par parties, on se ramène à une formulation qui a un sens même si la solution que l'on cherche n'appartient pas à  $C^2(\bar{I})$ .

**Proposition 2.2.1.** *On suppose que  $c \in C(\bar{I})$  et  $f \in C(\bar{I})$ . Soit  $u \in C^2(\bar{I})$  telle que  $u(a) = u(b) = 0$ .*

*La fonction  $u$  est solution classique de (2.2) si et seulement si*

$$\int_I (u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x))dx = \int_I f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(I). \quad (2.3)$$

**Preuve.**

Si  $u$  est solution classique de (2.2), on multiplie l'équation différentielle par  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ , ce qui donne

$$-u''(x)\phi(x) + c(x)u(x)\phi(x) = f(x)\phi(x), \quad \forall x \in I.$$

En intégrant le résultat sur  $I$ , on obtient

$$-\int_I u''(x)\phi(x)dx + \int_I c(x)u(x)\phi(x)dx = \int_I f(x)\phi(x)dx.$$

En faisant une intégration par parties sur la première intégrale et puisque  $\phi(a) = \phi(b) = 0$ , on obtient bien la formule (2.3).

Réciproquement, si  $u \in C^2(\bar{I})$  telle que  $u(a) = u(b) = 0$  satisfait (2.3), alors après intégration par parties en sens inverse, il vient que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ ,

$$\int_I (-u''(x) + c(x)u(x) - f(x))\phi(x)dx = 0,$$

ce qui implique que  $-u'' + cu - f = 0$  presque partout sur  $I$ . Du fait que  $-u'' + cu - f$  est continue sur  $I$ , on obtient en réalité que  $-u'' + cu - f = 0$  partout sur  $I$ . Si de plus par hypothèse  $u(a) = u(b) = 0$ , on voit que  $u$  est bien une solution classique de (2.2).  $\square$

La Proposition 2.3.1 conduit naturellement à la définition de solution faible du problème (2.2). On suppose maintenant seulement que  $c \in L^\infty(I)$  et  $f \in L^2(I)$ .

**Définition 2.2.2 (Solution faible).** *Soit  $u \in H_0^1(I)$ . On dit que  $u$  est solution faible de (2.2) si  $u$  satisfait la formule (2.3).*

La différence avec ce qui précède, en plus de la régularité moindre supposée sur les données  $c$  et  $f$ , est que l'on ne suppose plus  $u$  de classe  $C^2$ . De plus, les conditions aux limites de Dirichlet sont incorporées dans l'espace  $H_0^1(I)$ . Naturellement, si  $u \in H^1(I)$ , alors  $u' \in L^2(I) \subset L^1(I)$  et de même  $u'\phi' \in L^1(I)$  ce qui fait que la première intégrale a un sens. Comme les autres, d'ailleurs.

Comme  $\mathcal{D}(I)$  est dense dans  $H_0^1(I)$  par définition, on a le résultat suivant.

**Proposition 2.2.2.** *La fonction  $u \in H_0^1(I)$  est solution faible de (2.2) si et seulement si*

$$\int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(I). \quad (2.4)$$

Le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H_0^1(I) \text{ telle que} \\ \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(I) \end{cases} \quad (2.5)$$

est appelé formulation variationnelle ou formulation faible du problème (2.2).

**Preuve.**

Comme  $\mathcal{D}(I) \subset H_0^1(I)$ , si  $u$  est solution de (2.4), elle est a fortiori solution faible de (2.2).

Réciproquement, soit  $u$  vérifiant (2.3). Pour tout  $v \in H_0^1(I)$ , il existe une suite  $(\phi_n)_n \subset \mathcal{D}(I)$  telle que  $\phi_n \rightarrow v$  dans  $H^1(I)$ , c'est-à-dire que  $\phi_n \rightarrow v$  et  $\phi_n' \rightarrow v'$  dans  $L^2(I)$ . Prenant en compte (2.3), nous avons alors

$$\int_I (u'(x)\phi_n'(x) + c(x)u(x)\phi_n(x))dx = \int_I f(x)\phi_n(x)dx, \quad \forall n. \quad (2.6)$$

Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \left| \int_I u'(x)\phi_n'(x)dx - \int_I u'(x)v'(x)dx \right| &= \left| \int_I u'(x)(\phi_n'(x) - v'(x))dx \right| \\ &\leq \int_I |u'(x)| |\phi_n'(x) - v'(x)| dx \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|\phi_n' - v'\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_I c(x)u(x)\phi_n(x)dx - \int_I c(x)u(x)v(x)dx \right| &= \left| \int_I c(x)u(x)(\phi_n(x) - v(x))dx \right| \\ &\leq \int_I |c(x)| |u(x)| |\phi_n(x) - v(x)| dx \\ &\leq \|c\|_\infty \|u\|_{L^2} \|\phi_n - v\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

et passant à la limite dans (2.6), on obtient la formulation variationnelle (2.4).  $\square$

### 2.2.2 Existence et unicité d'une solution faible

**Théorème 2.2.3.** *Soit  $f \in L^2(I)$  et  $c \in L^\infty(I)$  telle que  $c \geq 0$  p.p. dans  $I$ . Alors le problème (2.5) admet une solution faible unique  $u \in H_0^1(I)$ . De plus, l'estimation suivante est satisfaite*

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C_P \|f\|_{L^2},$$

où  $C_P > 0$  est la constante de Poincaré.

**Preuve.**

La formulation faible (2.5) est de la forme

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

avec  $V = H_0^1(I)$  et

$$a(u, v) = \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx \quad \text{et} \quad F(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

L'idée est de vérifier que les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. Muni de la norme  $\|\cdot\|_{H_0^1}$ , l'espace  $H_0^1(I)$  est un espace de Hilbert. De plus, il est facile de voir que  $a$  est une forme bilinéaire et que  $F$  est une forme linéaire. Reste donc à prouver que  $a$  est continue et coercive sur  $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$  et que  $F$  est continue sur  $H_0^1(I)$ .

• La forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$ . En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx \right| \\ &\leq \left| \int_I u'(x)v'(x)dx \right| + \left| \int_I c(x)u(x)v(x)dx \right| \\ &\leq \int_I |u'(x)v'(x)|dx + \int_I |c(x)u(x)v(x)|dx \\ &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\ &\leq (1 + C_P^2 \|c\|_\infty) \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} \\ &= (1 + C_P^2 \|c\|_\infty) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}, \quad \forall u, v \in H_0^1(I), \end{aligned}$$

où  $C_P$  est la constante de Poincaré. De même, utilisant le fait que  $c \geq 0$  p.p. dans  $I$ , il vient que

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_I ((v'(x))^2 + c(x)(v(x))^2)dx \\ &\geq \int_I (v'(x))^2 dx = \|v'\|_{L^2}^2 = \|v\|_{H_0^1}^2, \quad \forall v \in H_0^1(I), \end{aligned}$$

prouvant ainsi que  $a$  est coercive sur  $H_0^1(I)$ . Finalement, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Poincaré, nous obtenons

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C_P \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

ce qui montre que  $F$  est continue sur  $H_0^1(I)$ . Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram sont donc satisfaites et le problème (2.5) admet une solution unique  $u \in H_0^1(I)$ . De plus, choisissant  $v = u$  dans la formulation (2.5), nous obtenons

$$a(u, u) = F(u).$$

La coercivité de  $a$  et la continuité de  $F$  impliquent alors que

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \leq |a(u, u)| = |F(u)| \leq C_P \|f\|_{L^2} \|u\|_{H_0^1},$$

ce qui donne

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C_P \|f\|_{L^2}.$$

□

### 2.2.3 Régularité

**Définition 2.2.3 (Solution forte).** *On dit que  $u$  est une solution forte si  $u \in W^{1,p}(I)$  (pour un certain  $1 \leq p \leq +\infty$ ) telle que*

$$-u'' + cu = f \quad \text{p.p. sur } I.$$

*Cette notion a en particulier un sens pour  $c \in L^\infty(I)$  et  $f \in L^2(I)$ .*

**Théorème 2.2.4.**

1. *Soit  $c \in L^\infty(I)$  et  $f \in L^2(I)$  et  $u \in H_0^1(I)$  une solution faible de (2.2). Alors  $u \in H^2(I)$  est une solution forte.*
2. *Si de plus  $c \in C(\bar{I})$  et  $f \in C(\bar{I})$ , alors  $u \in C^2(\bar{I})$  est une solution classique.*

**Preuve.**

1. Soit  $u \in H_0^1(I)$  une solution faible de (2.2). Alors, puisque  $C_c^1(I) \subset H_0^1(I)$ , pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$  on a

$$\int_I (u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x))dx = \int_I f(x)\phi(x)dx.$$

D'où

$$\int_I u'(x)\phi'(x)dx = \int_I (f(x) - c(x)u(x))\phi(x)dx.$$

Ceci veut dire que la dérivée faible de  $u'$  existe et est égale à  $f - cu$ , i.e.  $u'' = (u')' = f - cu$  comme élément de  $L^2(I)$  donc p.p. sur  $I$ . Comme  $c \in L^\infty(I)$  et  $f \in L^2(I)$  et  $u \in L^2(I)$ , il vient que  $f - cu \in L^2(I)$  et donc que  $u' \in H^1(I)$ , d'où  $u \in H^2(I)$ , ce qui montre que  $u$  est une solution forte.

2. Comme  $u \in H^2(I)$ , par l'injection  $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ , il vient  $u \in C^1(\bar{I})$ . Du fait que  $c \in C(\bar{I})$  et si, de plus,  $f \in C(\bar{I})$ , alors  $u'' = f - cu \in C(\bar{I})$  ce qui montre que  $u \in C^2(\bar{I})$ . Par conséquent, on a que  $-u'' = f - cu$  partout sur  $I$  et donc que  $u$  est une solution classique.

□

## 2.3 Problème avec des conditions aux limites de type Neumann

### 2.3.1 Formulation faible

Nous nous intéressons à présent au même problème mais avec des conditions aux limites de type Neumann. Plus précisément, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{dans } I, \\ u'(a) = u'(b) = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $c \in L^\infty(I)$  satisfait  $c(x) \geq c_0 > 0$  p.t.  $x \in I$ , et  $f \in L^2(I)$ .

La condition aux limites  $u'(a) = u'(b) = 0$  s'appelle la condition de Neumann (homogène)

**Définition 2.3.1 (Solution classique).** *On suppose que  $c \in C(\bar{I})$  et  $f \in C(\bar{I})$ . On appelle solution classique de (2.7) une fonction  $u \in C^2(\bar{I})$  qui satisfait (2.7).*

**Proposition 2.3.1.** *On suppose que  $c \in C(\bar{I})$  et  $f \in C(\bar{I})$ . Soit  $u \in C^2(\bar{I})$ .*

*La fonction  $u$  est solution classique de (2.7) si et seulement si*

$$\int_I (u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x))dx = \int_I f(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C^\infty(\bar{I}). \quad (2.8)$$

**Preuve.**

Si  $u$  est solution classique de (2.7), on multiplie l'équation différentielle par  $\phi \in C^\infty(\bar{I})$ , ce qui donne

$$-u''(x)\phi(x) + c(x)u(x)\phi(x) = f(x)\phi(x), \quad \forall x \in I.$$

En intégrant le résultat sur  $I$ , on obtient

$$-\int_I u''(x)\phi(x)dx + \int_I c(x)u(x)\phi(x)dx = \int_I f(x)\phi(x)dx.$$

En faisant une intégration par parties sur la première intégrale et puisque  $u'(a) = u'(b) = 0$ , on obtient bien la formule (2.8).

Réciproquement, si  $u \in C^2(\bar{I})$  satisfait (2.8), la satisfait en particulier pour des fonctions-test  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ , alors après intégration par parties en sens inverse, il vient que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(I)$ ,

$$\int_I (-u''(x) + c(x)u(x) - f(x))\phi(x)dx = 0, \quad (2.9)$$

ce qui implique que  $-u'' + cu - f = 0$  presque partout sur  $I$ . Du fait que  $-u'' + cu - f$  est continue sur  $I$ , on obtient en réalité que  $-u'' + cu - f = 0$  partout sur  $I$ . Donc,  $u$  est bien une solution classique de (2.7).

Montrons maintenant que les conditions aux limites de Neumann sont bien satisfaites. Soit  $\phi \in C^\infty(\bar{I})$ . Par (2.8) et intégration par parties du premier terme dans l'autre sens, on a

$$-\int_I u''(x)\phi(x)dx + u'(b)\phi(b) - u'(a)\phi(a) + \int_I c(x)u(x)\phi(x)dx = \int_I f(x)\phi(x)dx.$$

Donc

$$\int_I (-u''(x) + c(x)u(x) - f(x))\phi(x)dx = u'(a)\phi(a) - u'(b)\phi(b).$$

Or, de (2.9), l'intégrande du terme de gauche est identiquement nulle. On trouve donc que pour tout  $\phi \in C^\infty(\bar{I})$

$$u'(a)\phi(a) - u'(b)\phi(b) = 0.$$

Le choix  $\phi(x) = x - a$  implique alors que  $u'(b) = 0$ , puis le choix  $\phi(x) = x - b$  que  $u'(a) = 0$ .

□

Le résultat précédent et la densité des fonctions  $C^\infty(\bar{I})$  dans  $H^1(I)$  (voir Théorème 1.3.10) nous conduisent à la définition suivante de solution faible et de formulation variationnelle pour le problème de Neumann.

**Définition 2.3.2.** *On dira que  $u \in H^1(I)$  est solution faible de (2.7) si*

$$\int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(I). \quad (2.10)$$

Le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(I) \text{ telle que} \\ \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H^1(I) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

est appelé formulation variationnelle ou formulation faible du problème (2.7).

### 2.3.2 Existence et unicité d'une solution faible et régularité

**Théorème 2.3.2.** *Soient  $c \in L^\infty(I)$  satisfait  $c(x) \geq c_0 > 0$  p.t.  $x \in I$ , et  $f \in L^2(I)$ . Alors, il existe une unique solution faible  $u \in H^1(I)$  de (2.7). On a  $u \in H^2(I)$  et  $u$  est une solution forte. Enfin, si  $c \in C(\bar{I})$  et  $f \in C(\bar{I})$ , alors  $u \in C^2(\bar{I})$  et est une solution classique.*

**Preuve.**

La formulation faible (2.11) est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \end{array} \right.$$

avec  $V = H^1(I)$  et

$$a(u, v) = \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx \quad \text{et} \quad F(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

On vérifie que les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites. On sait que l'espace  $H^1(I)$  est un espace de Hilbert. De plus, il est facile de voir que  $a$  est une forme bilinéaire et que  $F$  est une forme linéaire. Reste donc à prouver que  $a$  est continue et coercive sur  $H^1(I) \times H^1(I)$  et que  $F$  est continue sur  $H^1(I)$ .

• La forme bilinéaire  $a$  est continue sur  $H^1(I) \times H^1(I)$ . En effet, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &= \left| \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)) dx \right| \\
 &\leq \left| \int_I u'(x)v'(x) dx \right| + \left| \int_I c(x)u(x)v(x) dx \right| \\
 &\leq \int_I |u'(x)v'(x)| dx + \int_I |c(x)u(x)v(x)| dx \\
 &\leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|c\|_{\infty} \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
 &\leq (1 + \|c\|_{\infty}) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad \forall u, v \in H^1(I).
 \end{aligned}$$

De même, en utilisant le fait que  $c(x) \geq c_0 > 0$  p.t.  $x \in I$ , il vient que

$$\begin{aligned}
 a(v, v) &= \int_I ((v'(x))^2 + c(x)(v(x))^2) dx \\
 &\geq \int_I ((v'(x))^2 + c_0(v(x))^2) dx \\
 &\geq \min\{1, c_0\} \|v\|_{H^1}^2, \quad \forall v \in H^1(I),
 \end{aligned}$$

prouvant ainsi que  $a$  est coercive sur  $H^1(I)$ . Finalement, en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$|F(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}, \quad \forall v \in H^1(I),$$

ce qui montre que  $F$  est continue sur  $H^1(I)$ . Les conditions d'application du théorème de Lax-Milgram sont donc satisfaites et le problème (2.11) admet une solution unique  $u \in H^1(I)$ . De plus, choisissant  $v = u$  dans la formulation (2.11), nous obtenons

$$a(u, u) = F(u).$$

La coercivité de  $a$  et la continuité de  $F$  impliquent alors que

$$\min\{1, c_0\} \|u\|_{H^1}^2 \leq |a(u, u)| = |F(u)| \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1},$$

ce qui donne

$$\|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{\min\{1, c_0\}} \|f\|_{L^2}.$$

Puisque  $C_c^1(I) \subset H^1(I)$ , pour tout  $\phi \in C_c^1(I)$  on a

$$\int_I (u'(x)\phi'(x) + c(x)u(x)\phi(x)) dx = \int_I f(x)\phi(x) dx.$$

D'où

$$\int_I u'(x)\phi'(x)dx = \int_I (f(x) - c(x)u(x))\phi(x)dx.$$

Ceci veut dire que la dérivée faible de  $u'$  existe et est égale à  $f - cu$ , i.e.  $u'' = (u')' = f - cu$  comme élément de  $L^2(I)$  donc p.p. sur  $I$ . Comme  $c \in L^\infty(I)$  et  $f \in L^2(I)$  et  $u \in L^2(I)$ , il vient que  $f - cu \in L^2(I)$  et donc que  $u' \in H^1(I)$ , d'où  $u \in H^2(I)$ , ce qui montre que  $u$  est une solution forte.

Enfin, Comme  $u \in H^2(I)$ , par l'injection  $H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ , il vient  $u \in C^1(\bar{I})$ . Du fait que  $c \in C(\bar{I})$  et si, de plus,  $f \in C(\bar{I})$ , alors  $u'' = f - cu \in C(\bar{I})$  ce qui montre que  $u \in C^2(\bar{I})$ . Par conséquent, on a que  $-u'' = f - cu$  partout sur  $I$  et donc que  $u$  est une solution classique.  $\square$

## CHAPITRE 3

# Espaces de Sobolev en dimension $N$

Dans ce chapitre, on désigne par  $\Omega$  un ouvert quelconque de  $\mathbb{R}^N$  pour  $N \geq 1$ . On note  $\partial\Omega$  sa frontière.

Un point dans  $\mathbb{R}^N$  est noté par  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , sa norme est donnée par  $\|x\| = (\sum_{i=1}^N |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

### 3.1 Dérivée faible

Pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$  qui désigne un multi-indice, on appelle ordre de  $\alpha$  et on note  $|\alpha|$  l'entier  $\sum_{i=1}^N \alpha_i$ , on note alors  $D^\alpha$  la dérivée d'ordre  $\alpha$  définie par

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N}.$$

**Définition 3.1.1 (Dérivée faible).** Soit  $u, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ .

1. On dit que  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  est la dérivée faible partielle de  $u$  par rapport à  $x_i$  si

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.1)$$

On note  $g = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  et  $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}) = \text{grad}(u)$ .

2. Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ , on dit que  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  est la dérivée faible de  $u$  d'ordre  $\alpha$  si

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.2)$$

On note  $g = D^\alpha u$ .

**Lemme 3.1.** *Quand elle existe, la dérivée faible (partielle) d'une fonction  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  est unique, à un ensemble de mesure nulle près.*

*Si de plus  $u \in L^1_{loc}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , alors la dérivée faible partielle coïncide avec la dérivée forte partielle.*

## 3.2 Définition et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

**Définition 3.2.1.** *Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \forall i \in \{1, \dots, N\} \text{ u a un dérivée faible partielle } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

*On pose  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ .*

*Remarque 3.2.1.* Comme pour la dimension un, en utilisant le langage des distribution, on peut dire que  $W^{1,p}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $u \in L^p(\Omega)$  telles que toutes les dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$   $i \in \{1, \dots, N\}$  au sens des distributions appartiennent à  $L^p(\Omega)$ .

**Théorème 3.2.1.** *Pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , on a les propriétés suivantes :*

1. *L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour la norme :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \begin{cases} \left( \|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max \left\{ \|u\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \mid i \in \{1, \dots, N\} \right\} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

2. *Pour  $p = 2$ , l'espace  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{H^1} &= \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2} = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

*et de la norme associée à ce produit scalaire*

$$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{W^{1,2}} = \left( \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. *Pour  $1 < p < +\infty$ , l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif.*

### 3.2. Définition et propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

4. Pour  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est séparable.

*Remarque 3.2.2.* 1. Pour  $1 \leq p < \infty$ , La norme  $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$  est équivalente aux normes suivantes

$$\|u\| = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$$

$$\|u\| = \max \left\{ \|u\|_{L^p}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}, i \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

2. Si la suite  $(u_n)_n$  est convergente vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , alors

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \begin{cases} \left( \|u_n - u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \max \left\{ \|u_n - u\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \mid i \in \{1, \dots, N\} \right\} \rightarrow 0 & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Ce qui implique que

$$\|u_n - u\|_{L^p} \rightarrow 0, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \rightarrow 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Par conséquent

$$(u_n \rightarrow u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega)) \iff \begin{cases} u_n \rightarrow u \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i \end{cases} \text{ dans } L^p(\Omega).$$

**Théorème 3.2.2 (Friedrichs).** Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < \infty$ . Alors il existe une suite  $(u_n)$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  telle que

$$u_n|_{\Omega} \rightarrow u \quad \text{dans } L^p(\Omega),$$

$$\nabla u_n|_{\omega} \rightarrow \nabla u|_{\omega} \quad \text{dans } L^p(\omega)^N \quad \text{pour tout } \omega \subset\subset \Omega,$$

où  $\omega \subset\subset \Omega$  signifie que  $\omega$  est un ouvert tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$  et  $\bar{\omega}$  est compact.

**Proposition 3.2.3.** Soit  $u \in L^p(\omega)$  avec  $1 < p \leq +\infty$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

2. Il existe une constante  $C$  telle que

$$\left| \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq \|\phi\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

### 3.3. Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

3. Il existe une constante  $C$  telle que pour tout ouvert  $\omega \subset\subset \Omega$  et tout  $h \in \mathbb{R}^N$  avec  $|h| < \text{dist}(\omega, \mathbb{R}^N - \Omega)$  on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|.$$

De plus, on peut prendre  $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  dans 2. et 3.

**Proposition 3.2.4 (Dérivation d'un produit).** Soit  $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors,  $uv \in L^\infty(\Omega)$  et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

**Proposition 3.2.5 (Dérivation d'un produit de composition).** Soit  $G \in C^1(\mathbb{R})$  telle que  $G(0) = 0$  et  $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$ .

Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}G \circ u = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

**Proposition 3.2.6 (Formule de changement de variables).** Soit  $\Omega$  et  $\mathcal{O}$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^N$  et  $H : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$  une application bijective,  $x = H(y) = (H_1(y), \dots, H_N(y))$ , vérifiant

$$H \in C^1(\mathcal{O}), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad \text{Jac}(H) \in (L^\infty(\mathcal{O}))^{N \times N} \quad \text{et} \quad \text{Jac}(H^{-1}) \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N},$$

(où  $\text{Jac}(H)$  désigne la matrice Jacobienne  $\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq N}$ ). Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $u \circ H \in W^{1,p}(\mathcal{O})$  et

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \circ H(y) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

### 3.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit  $m \geq 2$  un entier et soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}\}.$$

Il vient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq m, \quad u \text{ admet un dérivée faible d'ordre } \alpha, \quad D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. Pour  $1 \leq p < +\infty$ , cette norme est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left( \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour  $p = \infty$  elle est équivalente à la norme

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{0 \leq \alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

On pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ;  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$$

est un espace de Hilbert.

### 3.4 Opérateur de prolongement et densité

Il est souvent pratique d'analyser les propriétés des fonctions de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  en commençant par le cas où  $\Omega = \mathbb{R}$ . Par conséquent, il est utile de savoir comment prolonger une fonction  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  en une fonction  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ . Cependant, ce n'est pas toujours réalisable. Néanmoins, si l'ouvert  $\Omega$ , il est possible de construire un tel prolongement. Pour cela, définissons d'abord la notion d'ouvert régulier.

**Notation.** Soit  $x \in \mathbb{R}^N$ . On écrit  $x = (x', x_N)$  avec  $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ . On note

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N; x_N > 0\},$$

$$Q = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N; \|x'\| < 1 \text{ et } |x_N| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N,$$

$$Q_0 = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N; \|x'\| < 1 \text{ et } x_N = 0\}.$$

**Définition 3.4.1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ . On dit que  $\Gamma$  (ou  $\Omega$ ) est de classe  $C^1$  si pour tout  $x \in \Gamma$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^N$  et une application bijective  $H : Q \rightarrow U$  telle que

$$H \in C^1(\overline{Q}), H^{-1} \in C^1(\overline{U}), H(Q_+) = U \cap \Omega \text{ et } H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

**Théorème 3.4.1.** *On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^1$  avec  $\Gamma$  borné (ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ ). Alors, il existe un opérateur de prolongement  $P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$  tel que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

1.  $Pu|_{\Omega} = u$  ;
2.  $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$
3.  $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

où  $C$  dépend seulement de  $\Omega$ .

**Corollaire 3.1 (Densité).** *On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^1$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < +\infty$ . Alors, il existe une suite  $(u_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$  telle que*

$$u_n|_{\Omega} \rightarrow u \quad \text{dans } W^{1,p}(\Omega).$$

Autrement dit, l'ensemble  $E = \{u|_{\Omega}; u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\}$  est dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

## 3.5 Injection de Sobolev

**Théorème 3.5.1.** *On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^1$  avec  $\Gamma$  borné. Alors, on a les injections continues suivantes*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{si } 1 \leq p < N \\ L^{p'}(\Omega) & \text{si } p = N, \forall p' \geq 1 \\ L^{\infty}(\Omega) & \text{si } p > N \end{cases}$$

où  $p^* = \frac{Np}{N-p}$  (i.e.,  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ).

De plus, si  $p > N$  on a pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{W^{1,p}} \|x - y\|^{\alpha} \quad \text{p.t. } x, y \in \Omega,$$

avec  $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$  et  $C$  dépend seulement de  $\Omega$ ,  $p$  et  $N$ . En particulier,  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ .

**Théorème 3.5.2 (Rellich-Kondrachov).** *On suppose que  $\Omega$  est borné de classe  $C^1$ . Alors on a les injections compactes suivantes*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p'}(\Omega) & \text{si } 1 \leq p < N, \forall p' \in [1, p^*[ \\ L^{p'}(\Omega) & \text{si } p = N, \forall p' \geq 1 \\ C(\overline{\Omega}) & \text{si } p > N \end{cases}$$

où  $p^* = \frac{Np}{N-p}$  (i.e.,  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ).

### 3.6 Espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Définition 3.6.1.** Soit  $1 \leq p < \infty$ . L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est l'adhérence de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Pour  $p = 2$ , l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  sera noté dorénavant par  $H_0^1(\Omega)$ .

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable, il est réflexif si  $1 < p < \infty$ .  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ .

**Théorème 3.6.1.** On suppose que  $\Omega$  est borné de classe  $C^1$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  avec  $1 \leq p < \infty$ .

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $u = 0$  sur  $\Gamma$ .
2.  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**Corollaire 3.2 (Inégalité de Poincaré).** On suppose que  $\Omega$  est borné de classe  $C^1$  et  $1 \leq p < \infty$ . Alors il existe une constant  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p)^N}, \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En particulier, l'application

$$\begin{aligned} W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\mapsto \|\nabla u\|_{(L^p)^N} \end{aligned}$$

définit une norme sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  noté par  $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$ , équivalente à la norme  $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ . De plus  $(W_0^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,p}})$  est un espace de Banach.