**Université de Jijel**
**Département de Mathématiques**
**Master 1 Analyse Fonctionnelle**
**Module : Espaces de Sobolev**

---

# Série de TD N°1

2025-2026

---

**<u>Exercice 1 :</u>**

Soit $I = ]-1, 1[$.

1. On considère la fonction $u$ définie sur $I$ par
$$u(x) = 1 - |x|, \quad x \in I.$$
Montrer que $u \in \mathrm{L}^p(I)$ et calculer sa dérivée faible dans $\mathrm{L}^p(I)$. En déduire que $u \in W^{1,p}(I)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
2. Même question avec la fonction $u$ définie sur $I$ par
$$u(x) = \begin{cases} 1 & si \quad -1 < x < 0 \\ x+1 & si \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$
3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$u(x) = \begin{cases} ex^2 & si \quad x < 1 \\ e^x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$
Etudier si $u \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ a une dérivée faible et, si oui, la calculer.

**<u>Exercice 2 :</u>**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $p \in ]1, +\infty[$. Montrer que les deux normes $|||\cdot|||_{W^{1,p}}$ et $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ définies par
$$|||u|||_{W^{1,p}} = \|u\|_{\mathrm{L}^p} + \|u'\|_{\mathrm{L}^p} \quad \text{et} \quad \|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|^p_{\mathrm{L}^p} + \|u'\|^p_{\mathrm{L}^p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$
sont équivalentes.

**<u>Exercice 3 :</u>**

Soient $I = ]0, 1[$ et $u$ une fonction définie sur $I$ par $u(x) = x^\alpha$. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour lesquelles $u \in H^1(I)$.

**<u>Exercice 4.</u>**

Soit $I = ]-1, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : T \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = \arctan(nx), \quad x \in I.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)$ est bornée dans $W^{1,1}(I)$.
2. Montrer que $(T_{f_n})$ converge dans $\mathcal{D}'(I)$ vers $(T_f)$, où $f \in \mathrm{L}^1(I)$ à identifier.

3. Calculer $(T_f)'$ dans $\mathcal{D}'(I)$ et en déduire que $f$ n'appartient pas à $W^{1,1}(I)$.

**Exercice 5 :**

On se place dans $\mathbb{R}$. Soit $a < a_1 < b_1 < b$, $I = ]a, b[$, $I_1 = ]a_1, b_1[$, et $p$ un réel de $[1, +\infty]$.

(a) On considère l'application $u : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a_1, \ x \geq b_1, \\ 1 & si \quad x = \frac{a_1+b_1}{2}, \\ \frac{2}{b_1-a_1}x - \frac{2a_1}{b_1-a_1} & si \quad x \in [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], \\ -\frac{2}{b_1-a_1}x + \frac{2b_1}{b_1-a_1} & si \quad x \in [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]. \end{cases}$$

Montrer que $u$ appartient à $W^{1,p}(I)$.

(b) Soit $v$ l'application de $I$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$v(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in I \backslash I_1, \\ 1 & si \quad I_1. \end{cases}$$

$v$ appartient-elle à $W^{l,p}(I)$ ?

**Exercice 6 :**

Soit $I$ est un intervalle borné et $1 \leq p \leq +\infty$, alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in W^{1,p}(I)$

$$\|u\|_{C(\overline{I})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}}.$$

**Exercice 7 :**

Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes

**(i)** $u$ est lipschitzienne ;

**(ii)** il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer l'implication facile.
2. On suppose $u$ lipschitzienne.

   (a) Montrer que si $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$, alors

   $$\int_{\mathbb{R}} u(x)\phi'(x)dx = -\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\phi(x)dx.$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante $0 < C < +\infty$ telle que l'on ait

   $$\left|\int_{\mathbb{R}} u(x)\phi'(x)dx\right| \leq C\|\phi\|_{\mathrm{L}^1}, \qquad \text{pour toute } \phi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

   (c) En déduire que $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ et conclure.

**Exercice 8 :**

Dans toute la suite, nous fixons $p \in ]1, +\infty[$ et considérons $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ tel que $u(0) = 0$

1. Soit $a \in ]1, +\infty[$. Montrer que

$$|u(x)|^{a-1}u(x) = \int_0^x a|u(s)|^{a-1}u'(s)ds, \quad \forall x \in [0,1].$$

2. Soit $p' \in ]1, +\infty[$ et $a = 1 + \frac{p'}{q}$. En utilisant l'alinéa 1), montrer que
$$|u(x)|^a \leq a\|u\|_{L^{p'}}^{a-1}\|u'\|_{L^p}, \quad \forall x \in [0,1].$$
En déduire que
$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{L^{p'}}^{1-b}\|u'\|_{L^p}^b,$$
où $b \in ]0,1[$ est une constante à déterminer.

3. Soit $r \in ]p', +\infty[$. Montrer que
$$\|u\|_{L^r}^r \leq \|u\|_{L^{p'}}^{p'}\|u\|_\infty^{r-p'}.$$
Indication. Remarquer que $|u(x)|^r = |u(x)|^{p'}|u(x)|^{r-p'}$.

4. En utilisant 2) et 3), déduire que
$$\|u\|_{L^r} \leq C\|u\|_{L^{p'}}^{1-c}\|u'\|_{L^p}^c,$$
où $c \in ]0,1[$ est une constante à déterminer.

.

**Exercice 9 :**

Soit $I$ un intervalle ouvert borné, $u \in C^\infty(\overline{I})$

1. Montrer que
$$\int_{I\times I}(u(x)-u(y))^2dxdy \leq |I|^3\|u'\|_{\mathrm{L}^2}^2, \quad \text{où } |I| = mes(I).$$

2. Déduire l'inégalité suivant
$$\int_I u(x)^2dx \leq \frac{|I|^2}{2}\int_I |u'(t)|^2dt - \frac{1}{|I|}\Big(\int_I u(x)dx\Big)^2.$$

3. Est ce que cette inégalité est vérifiée pour $u$ dans $H^1(I)$ ?.

**Exercice 10 :**

Soit $I = ]0,1[$ et $u : I \to \mathbb{R}$ une application. On pose
$$\bar{u} = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in I \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}\backslash I. \end{cases}$$

1. Supposons que $u \in W_0^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.
2. Inversement, soit $u \in \mathrm{L}^p(I)$ avec $1 \leq p < \infty$ tel que $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $u \in W_0^{1,p}(I)$
3. Soit $u \in \mathrm{L}^p(I)$ avec $1 \leq p < \infty$. Montrer que $u \in W_0^{1,p}(I)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\left|\int_{\mathbb{R}} \bar{u}(x)\phi'(x)dx\right| \leq C\|\phi\|_{\mathrm{L}^q(\mathbb{R})}, \quad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$