

Partie 3 du chapitre I

(la suite)

5) Équivalence logique « $\Leftrightarrow$ » التكافؤ المنطقي

- les expressions « Le triangle ABC est rectangle » et « Le triangle ABC vérifiant $AB^2 + BC^2 = AC^2$ » ne sont pas identique et pourtant, il y a une équivalence entre elles assurée par le théorème et le théorème inverse de Pythagore.

Nous dirons que deux assertions sont logiquement équivalentes si elles ont la même valeur de vérité, et on note $P \Leftrightarrow Q$. En d'autres termes,

$P \Leftrightarrow Q$ est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou si toutes les deux sont fausses.

Par exemple,

- Les propositions « $x^2 = 9$ » et « $x = 3 \vee x = -3$ » sont équivalentes
- Aussi, $(P \wedge Q)$ et $(\text{Non } P \vee \text{Non } Q)$, sont équivalentes (leur équivalence est vraie).

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarques :

- La proposition $P \Leftrightarrow Q$ correspond à la proposition $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.
- Nous pourrions donc l'exprimer comme suit :
 - P est équivalent à Q,
 - Pour P, il faut et il suffit Q.
 - P est une condition nécessaire et suffisante pour Q,
 - P si et seulement si Q.

En effet, P si Q correspond à $Q \Rightarrow P$
 cependant, P seulement si Q correspond à $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ qui
 correspond à $P \Rightarrow Q$

Exemples (durant le cours)

Propriétés :

$$P \Leftrightarrow P$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P) \quad (\text{l'équivalence est commutative})$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow P \Leftrightarrow R \quad (\text{l'équivalence est transitive})$$

Exercice. Montrer les équivalences suivantes

$$\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \bar{Q}) \text{ puis } ((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

Priorité des connecteurs

Les connecteurs sont appliqués dans l'ordre suivant : $\neg$, $\wedge$,
 $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Exemples :

$\neg P \wedge Q$ première priorité pour la négation, ensuite la
 conjonction $(\neg P) \wedge Q$.

$$P \vee Q \wedge R \longrightarrow P \vee (Q \wedge R)$$

$P \vee Q \vee R \longrightarrow (P \vee Q) \vee R$ ou bien $P \vee (Q \vee R)$ associativité de la
 disjonction

$P \wedge Q \Rightarrow R$ la conjonction passe avant l'implication $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

■ Les quantificateurs المكلمات

Le quantificateur universel المكتم الكلي

- L'énoncé « $x \geq 0$ » n'est pas une proposition (on verra plus tard qu'il s'agit

d'un **prédicat** **جملة مفتوحة**, on le note $P(x)$.

Par contre **P** : « Pour tout $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ » est une proposition (et elle est fausse).

On peut l'écrire : « $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ »

- On appelle le symbole " $\forall$ " **le quantificateur universel** **المكمم الكلي**.
- On lit aussi « quel que soit ($x \in \mathbb{R}, x \geq 0$) (ou bien « quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}$, x^2 est positif ou nul »).
- Ce symbole représente la lettre **A** renversée, qui est l'initiale du mot anglais "All". Il doit toujours être suivi du signe d'appartenance " $\in$ ".

Le quantificateur existentiel **المكمم الوجودي**

La proposition P est fausse car « il existe au moins un réel qui n'est pas positif » (par exemple -1).

- On peut écrire « $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$ »
- Le symbole $\exists$ qui signifie « il existe au moins un ... tel que **يوجد على الأقل بحيث** » représente le quantificateur existentiel.
- Ce symbole représente la lettre « E » renversée qui est l'initiale du mot anglais « Exists ».
- On peut éventuellement rajouter un point d'exclamation pour montrer l'unicité. On a alors : $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ... tel que **يوجد وحيد بحيث** ».
- Exemple. $\exists! x \in [0,1], x^2 - 4x + 3 = 0$

qui signifie « Il existe un unique x appartenant à l'intervalle $[0,1]$ tel que : $x^2 - 4x + 3 = 0$ ».

Exercice (cours): Quelles sont les propositions vraies et celles fausses parmi : ...

Exercice (cours): Ecrivons avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1) f est la fonction nulle (sachant que f est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- 2) f est l'identité sur $\mathbb{R}$
- 3) l'équation " $\sin x = x$ " a une et une seule solution sur $\mathbb{R}$

puis

f n'est pas nulle

f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$

f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$

puis

- 1) f est constante sur $\mathbb{R}$

- 2) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$
- 3) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (V)
- 4) Il existe un entier plus grand que tous les entiers (F)

Propriétés des quantificateurs : Les quantificateurs possèdent un certain nombre de propriétés dont :

- **L'ordre des quantificateurs.** L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs change la signification.
- **Exemple :** « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ » signifie « Quel que soit le réel x , il existe au moins un réel y tel que y soit supérieur à x ». On peut toujours trouver un nombre supérieur à un nombre réel donné car l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas borné. La proposition est vraie.

Inversons maintenant les quantificateurs :

« $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x$ » signifie « Il existe au moins un réel x tel que pour tout réel y , y soit supérieur à x ». Cette proposition cette fois est fausse car, on ne peut pas trouver un Réel inférieur à tous les autres. En effet l'ensemble $\mathbb{R}$ n'a pas de borne inférieure.

Négation d'une proposition universelle.

- **Exemple :** soit la proposition « Tous les étudiants présents comprennent le cours ». Sa négation est
« Il existe au moins un étudiant présent qui ne comprend pas le cours ».
- Une proposition universelle s'énonce « Pour tout élément x d'un ensemble E , x possède la propriété P ». Sa négation sera : « il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui ne possède pas la propriété P ».

En symboles : $\forall x \in E: P(x) \Leftrightarrow \exists x \in E: \overline{P(x)}$

par exemple,

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x < 0$$

$$\overline{\forall x \in E: (P(x) \Rightarrow Q(x))} \Leftrightarrow \exists x \in E: (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$$

- **Remarque :** Pour démontrer qu'une proposition universelle n'est pas vraie, il suffit donc de trouver un seul x qui ne vérifie pas la propriété P . C'est ce qu'on appelle **un contre-exemple** مثال مضاد.

Négation d'une proposition existentielle.

- **Exemples :** Soit la proposition « Il existe au moins un informaticien qui n'aime pas les maths. », sa négation est « Tous les informaticiens aiment les maths ».

la proposition « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ », elle est fausse car un carré ne peut être négatif, sa négation, et qui est vraie, est « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1$ ».

- Une proposition existentielle s'énonce : « Il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui possède la propriété P ». Sa négation sera : « Pour tout élément x de l'ensemble E , x ne vérifie pas P ».

En symboles : $\overline{\exists x \in E : P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E : \overline{P(x)}$

par exemple,

$$\overline{\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq -1.$$

Quantificateurs et connecteurs

- 1) $(\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))$
- 2) $(\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))$
- 3) $(\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))$ (l'implication inverse est fausse)
- 4) $(\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))$

Exemple (détails pendant le cours): E = l'ensemble des étudiants, $P(x)$ = l'étudiant x joue du foot-ball, $Q(x)$ = l'étudiant x joue du basket-ball.

Les quantificateurs multiples

- « $\forall x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$ » signifie que pour tout élément x de E et pour tout élément y de F on a la propriété $P(x, y)$
- « $\exists x \in E, \exists y \in F : P(x, y)$ » signifie qu'il existe au moins un élément x de E et il existe au moins un élément y de F , qui vérifient $P(x, y)$

Propriétés

$$(\forall x \in M, \forall y \in F : P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in M : P(x, y))$$

$$(\exists x \in M, \exists y \in F : P(x, y)) \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in M : P(x, y))$$

mais attention : on peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes, en effet

$$(\exists x \in E; \forall y \in F : P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E : P(x, y))$$

par contre, pour la dernière, l'implication inverse n'est pas vraie (explication durant le cours).

Exemple: M = l'ensemble des étudiants de Mathématiques, F = l'ensemble des étudiants d'Informatique, $P(x, y)$ = x est ami avec y .