

الأعمال الموجهة رقم 2

(التمرين 1): لتكن الدالة الدرجية المعرفة على المجال $[-2, 2]$ كما يلي:

$$\varphi(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t = -2 \\ +1 & \text{si } -2 < t < -1 \\ +3 & \text{si } t = -1 \\ -2 & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < t \leq 2 \end{cases}$$

- (1) أكتب التجزئة $\mathcal{S}$ للمجال $[-2, 2]$ والتي تقابل عبارة φ .
- (2) هل هذه التجزئة منتظمة؟ برر إجابتك.
- (3) أحسب التكامل $\int_{-2}^2 \varphi(t) dt$ باستعمال التجزئة $\mathcal{S}$.
- (4) أدرس نتيجة التكامل $\int_{-2}^{\alpha} \varphi(t) dt$ حسب قيم $\alpha \in [-2, 2]$. (يترك للطالب)

(التمرين 2):

- (1) أكتب عبارة دالة الجزء الصحيح $E(x)$ على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.
- (2) أوجد التجزئة $\mathcal{S}_1$ للمجال في هذه الحالة. هل هذه التجزئة منتظمة؟ برر إجابتك.
- (3) أحسب تكامل $E(x)$ على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ باستعمال التجزئة $\mathcal{S}_1$.
- (4) أوجد التجزئة المنتظمة $\mathcal{S}_2$ من أجل 4 مجالات جزئية.
- (5) أحسب من جديد تكامل $E(x)$ على المجال $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ باستعمال التجزئة $\mathcal{S}_2$.

(التمرين 3): لتكن عائلة الدوال $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة على المجال $[0, 1]$ كما يلي: (يترك للطالب)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{p^2}{n^2} & \text{si } x \in \left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}, \quad p \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

- (1) أكتب عبارة الدوال الأولى: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.
- (2) بين من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أن φ_n هي دالة درجية. ثم أحسب تكاملها على المجال $[0, 1]$.

(التمرين 4): باستعمال جدول الدوال الأصلية وخواص التكامل، أحسب التكاملات التالية:

$$I_1 = \int_{-1}^5 |1-x| dx, \quad I_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 7} dx \quad (\text{ت.ط}), \quad I_3 = \int_0^1 \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad (\text{ت.ط}), \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) \cos(2x) dx, \quad I_6 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (\text{ت.ط})$$

(التمرين 5: لتكن التكاملات التالية:

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx \quad , \quad I_n = \int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{x + n} dx$$

(1) أوجد حصر للعلاقة $|I_n - I|$

(2) برهن أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n - I = 0$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(التمرين 6: من أجل $a \in \mathbb{R}$ ليكن التكامل التالي: (تترك للطالب)

$$K(a) = \int_0^1 (x^2 - ax)^2 dx$$

(1) برهن أن $K(a) = \frac{1}{3} \left(a - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{80}$.

(2) استنتج $\inf_{a \in \mathbb{R}} K(a)$.

(التمرين 7: أحسب القيمة المتوسطة للدوال التالية على المجال المعطى:

(1) الدالة $g(x) = x^2 + 3x + 2$ على المجال $[-1, 0]$. ثم على المجال $[-1, 1]$.

(2) الدالة $f(x) = |x|$ على المجال $[-2, 2]$. (تترك للطالب)

(3) الدالة $h(x) = \cos x$ على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (تترك للطالب)