Méthodes numériques

Introduction: les méthodes numériques sont utilisées pour résoudre des problèmes complexes et insolubles par des méthodes analytiques. Le résultat obtenu est généralement un résultat approximatif avec une certaine erreur.

1. Les erreurs

Il existe plusieurs sources d'erreurs, dont les plus importantes sont :

- L'erreur de données résultant de la résolution de problèmes dont les données sont obtenues à partir d'expériences inexactes.
- L'erreur de la méthode résultant du remplacement d'une relation mathématique complexe par une autre relation plus simple (simplification).
- L'erreur causée par l'ordinateur lui-même. Par exemple, la fraction 0.3 n'a pas de représentation binaire exacte (finie). Ces erreurs se propagent au fil des calculs et peuvent compromettre la précision des résultats.

Les erreurs peuvent s'exprimer de plusieurs manières, dont les plus importantes sont:

1.1 Erreur absolue:

Elle est définie comme étant la différence entre la valeur réelle et la valeur approximative. Elle est représentée par E = $/ x - x0 / = \Delta x$

1.2 Erreur relative :

Il s'agit de l'erreur absolue divisée par la valeur réelle. Elle est symbolisée par:

$$\mathbf{R=E /x =\Delta x/ x}$$

L'erreur absolue donne une mesure quantitative de l'erreur commise et l'erreur relative en mesure l'importance.

1.3 Représentation décimale des nombres approchés :

Tout nombre réel peut être représenté par :

$$x= a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_{m-n}10^{m-n} \ldots$$

où **:**

a_i : des chiffres **(0,1,2,…9)**

m **:** rang supérieur du nombre x.

Exemple :

$3125,167=3.10^3+1.10^2+2.10^1+5.10^0+1.10^{-1}+6.10^{-2}+7.10^{-3}$

1.3.1 Chiffres significatifs :

On appelle un chiffre significatif (c.s) d'un nombre approché, tout chiffre dans sa représentation décimale différent de zéro, un zéro entre deux chiffres significatifs ou s'il constitue un chiffre conservé (un zéro terminal).

Les zéro placés à gauche du premier c.s ne sont pas significatifs. Exemple :

$$x= 0,\underbrace{00}_{1}5\underbrace{00}_{2}7\underbrace{00}_{3}$$

Les zéro de 2 et 3 sont significatifs et ceux de 1 ne le sont pas.

Ainsi, le nombre des c.s est 6.

1.3.2 Chiffres significatifs exacts :

Soit x* une valeur approchée de x dont la représentation décimale est :

$$x^*= a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \cdots + a_{m-n+1}10^{m-n+1} + a_{m-n}10^{m-n} \ldots$$

On dit que les n premiers chiffres significatifs d'un nombre x* sont exacts si l'erreur absolue vérifie :

$$\Delta x \leq 0,5\times 10^{m-n+1}$$

Si un chiffre significatif est exact, tous ceux à sa gauche le sont également.

Exemple :

$x = 35,97$ et $x^* = 36,00 = 3\times10^{1}+6\times10^{0}+0\times10^{-1}+0\times10^{-2}$

$m=1$ et $\Delta x = |35,97-36,00| \approx 0,3\times10^{-1} < 0,5\times10^{-1}$

$m-n+1 = -1 \rightarrow n=3$

Ainsi, x* est une approximation de x avec 3 c.s exacts, c'est-à-dire :

$x^*=36,0$

- Autre définition :

Un chiffre significatif d'un nombre x^* est exact si l'erreur absolue de ce nombre ne dépasse pas une demie unité du rang de ce chiffre significatif.

Ainsi :

Le nième c.s après la virgule est exact si : $\Delta x \leq 0.5\ 10^{-n}$

Le n-ieme c.s avant la virgule est exact si : $\Delta x \leq 0.5\ 10^{n-1}$.

Exemple :

$x = 35,97$ et $x^* = 36,00$.

$\Delta x = |35,97-36,00| \approx 0,3\times10^{-1} < 0,5\times10^{-1}$

n=1, le premier c.s après la virgule est exact. Donc $x^*=36,0$.

Remarque :

Les c.s.e après la virgules sont aussi appelées les décimales exactes.

2. Résolution d'équations non linéaires

La plupart des équations qui apparaissent dans les applications scientifiques ne sont pas linéaires et leur résolution n'est pas toujours facile ou possible. C’est pourquoi on fait appel aux méthodes numériques pour trouver les racines de ces équations ou des valeurs très proches.

Mais avant cela, on doit isoler (séparer) les racines de l'équation, c'est-à-dire trouver le nombre de racines ainsi que les intervalles correspondants.

Ces racines peuvent être isolées en utilisant différentes méthodes :

- Méthode graphique:

La racine représente l’intersection de la courbe avec l’axe des x, et il est possible de repérer facilement l’intervalle dans lequel elle se trouve.

- Méthode de balayage :

Cette méthode consiste à dresser un tableau avec des valeurs intermédiaires de l’intervalle et les signes de f(x). Pour chaque changement de signes, il existe une racine de f(x).

Exemple :

Soit $f(x)=x^3-6x+2=0$

x	f(x)
$-\infty$	-
-3	-
-1	+
0	+
1	-
3	+
$+\infty$	+

Ainsi, il existe 3 racines comprises respectivement dans [-3,-1], [0,1] et [1,3].

- Méthode analytique:

Si la dérivée de la fonction est continue et le calcul de ses racines est facile, il suffit d’étudier les signes de la fonction aux racines de la dérivée et aux extrémités de l’intervalle ([a, b]).

Exemple:

$f(x)=x^4+4x+2=0$, $f'(x)=4x^3+4=0$, $4(x^3+1)=0$ $x=-1$

$f(-1) < 0$,$f(-\infty) > 0$, $f(+\infty) > 0$

Cette fonction possède deux racines :

$c_1 \in]-\infty, -1[$ et $c_2 \in]-1, +\infty[$

Dans ce qui suit, nous présenterons quelques techniques de résolution d'équations non linéaires.

2.1-Méthode de la Bissection (Dichotomie)

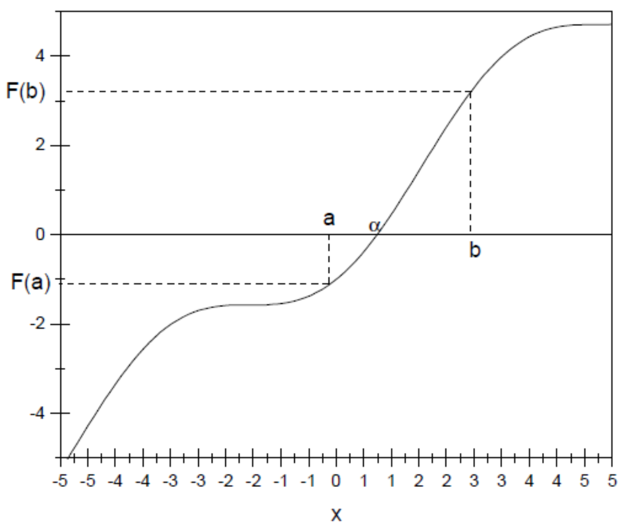
La méthode de la bissection est basée sur le théorème des valeurs Intermédiaires :

1- $f(x)$ est continue sur un intervalle $[a, b]$

2- $f(a).f(b) < 0$

D'après 1 et 2, il existe au moins une valeur $\alpha \in [a, b]$ telle que $f(\alpha)=0$.

De plus, si $f(x)$ est monotone sur l'intervalle $[a, b]$ (strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$), alors la racine α est unique sur $[a, b]$.



La longueur de l'intervalle entourant la racine est divisée par deux à chaque itération. Cela permet de déterminer à l'avance le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la racine avec une certaine erreur absolue Δx. Soit L=b-a, la longueur de l'intervalle de départ. Après une itération, le nouvel intervalle est de longueur L/2 et après n itérations la longueur de l'intervalle est : $L/2^N$

Le nombre N d'itérations à effectuer doit alors vérifier $(b-a)/2^N \leq \varepsilon$ qui est équivalent à $N \geq \ln((b-a)/\varepsilon)/\ln(2)$.

Algorithme :

Soit l'intervalle [a, b] pour lequel f(x) possède un changement de signe ((fa).f(b) < 0).

Entrées (Données) : a, b (les extrémités de l'intervalle) et ε (la précision désirée).

Sortie : la valeur approchée de la solution de f(x) = 0.

```
Pour i=1, N faire
    x=(a+b)/2
    Ecrire i,a,b x, f(x)
     Si f(a).f(x) <0 alors
     b=x
    Sinon
    a=x
    Fin si
Fin Pour
```

Exemple :

On considère la fonction $f(x) = x^2e^x - 1 = 0$

1- Trouver un intervalle $I = [a, b]$ de longueur 1 contenant la racine x de f(x)

2- Après avoir vérifié l'applicabilité de la méthode de Dichotomie sur cet intervalle, calculer les cinq premières itérations.

3- Calculer le nombre d'itération qu'il faut pour avoir la solution avec une précision $\varepsilon = 10^{-4}$.

Solution :

1. Domaine de définition de $f(x) = x^2e^x - 1$ est $R =]-\infty,+\infty[$

La première dérivée de f(x) est $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(x + 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1, f(-2) = -0.4587, f(0) = -1, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

($x=-100, (-100)^2=10^4$, $e^{-100} = 3.72.10^{-44}$ donc $xe^x \to 0$)

Donc, il existe une racine dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

2. sur l'intervalle I=[0,1], la fonction $f(x)=x^2e^x-1$ est définie et continue. De plus, f(0)=-1 et f(1)=1.7183. Nous pouvons appliquer la méthode de la dichotomie sur cet intervalle.

Etape 1 :

$a_1 = 0$, $b_1=1$, $\mathbf{c_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5, f(0.5) = -0.5878}$

Test : $f(a_1). f(c_1) > 0 \rightarrow$ On choisit l'intervalle $[c_1,b_1]$.

Etape 2 :

$a_2 = c_1 = 0.5$, $b_2=b_1=1$, $\mathbf{c_2} = \frac{\mathbf{a_2+b_2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0.5+1}}{\mathbf{2}} = 0.75$, f(0.75)=0.1908

Test : $f(a_2). f(c_2) < 0 \rightarrow$ On choisit l'intervalle $[a_2,c_2]$.

Etape 3 :

$a_3 = a_2 = 0.5$, $b_3 = c_2 = 0.75$, $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2} = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625,$

$$f(0.625) = -0.1908$$

Test : $f(a_3).\ f(c_3) > 0 \rightarrow$ On choisit l'intervalle $[c_3,b_3]$.

Etape 4 :

$a_4 = c_3 = 0.625$, $b_4 = b_3 = 0.75$, $c_4 = \frac{a_4+b_4}{2} = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875$

$$f(0.6875) = -0.0600$$

Test : $f(a_4).\ f(c_4) > 0 \rightarrow$ On choisit l'intervalle $[c_4,b_4]$.

Etape 5 :

$a_5 = c_4 = 0.6875$, $b_5 = b_4 = 0.75$, , $c_5 = \frac{a_5+b_5}{2} = \frac{0.6825+0.75}{2}$

$= 0.71875, f(0.71875) = 0.0600$

Test : $f(a_5).\ f(c_5) < 0 \rightarrow$ On choisit l'intervalle $[a_5,c_5]$.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que nous atteignons la racine avec une précision donnée.

Pour calculer le nombre d'itérations nécessaire pour avoir la solution avec une précision ε donnée, nous utilisons la formule précédente :

$N \geq (\ln(b-a)-\ln(\varepsilon))/\ln(2)$. On trouve $N \geq 13{,}288$ donc N=14 itérations.

2.2 Méthode de point fixe (ou approximations successives)

Soit f(x) une fonction réelle définie sur l'intervalle [a, b] et possède une racine αε [a, b]. La méthode de point fixe permet de remplacer l'équation f(x) = 0 par une équation équivalente $x = g(x)$.

Soit une fonction g(x) continue et dérivable sur [a,b] et telle que :

1) $\boldsymbol{g[a,b] \subset [a,b]}$

2) $\forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\ |\dot{\boldsymbol{g}}(\mathbf{x})| \leq \mathbf{k} < \mathbf{1}$

Alors la suite $x_{i+1} = g(x_i)$, i=0,1,…converge verge vers l'unique point fixe x^* quel que soit la valeur initiale x_0.

Le critère d'arrêt est $|x_{i+1}-x_i| < \varepsilon$.

Exemple :

Trouver la racine de l'équation $\mathbf{e^x-x-2=0}$, comprise dans l'intervalle **[1,2]** avec ε **=5.10^{-3}.**

$x=g_1(x)=e^x-2$

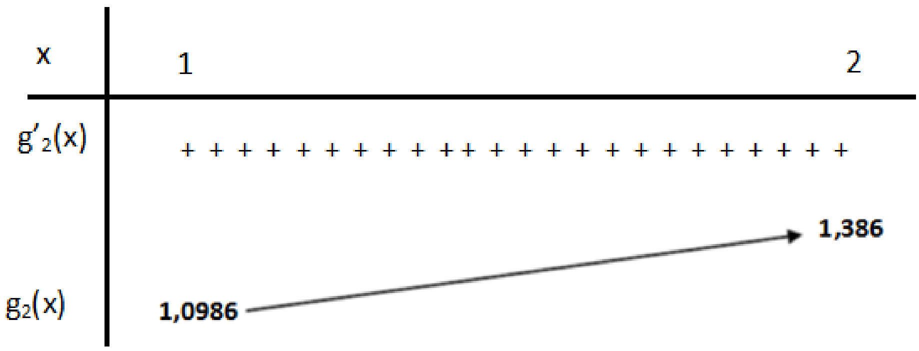
$x=g_2(x)=\ln(x+2)$

$g_1(1)=0.7183\notin[1,2]$

$g_2(1)=\ln(1+2)=1.0986\in[1,2]$

$g_2(2)=\ln(4)=1.386\in[1,2]$

$g_2'(x)=1/(x+2)>0,\ \forall x\in[1,2]$



$g_2[1,2]=[1.0896,1.386]\subset[1,2]$

$\mathbf{1 \le x \le 2 \ \rightarrow\ 3 \le x+2 \le 4 \rightarrow 1/(x+2)= g_2'(x) \le 1/3}$

Max$|\ \boldsymbol{g_2'}\ (\boldsymbol{x})| = \mathbf{\frac{1}{3} < 1}$

Le suite est convergente $\forall\ x_0$

$x_0=1.5$, $\varepsilon=5.10^{-3}$

$x_1=g_2(x_0)=g_2(1.5)=\ln(3.5)=1.2528$, $/x_1-x_0/=0.2475>\varepsilon$

$x_2=g_2(x_1)= 1.1795$, $/x_2-x_1/=0.0733>\varepsilon$

$x_3=g_2(x_2)= 1.1567$, $/x_3-x_2/=0.0228>\varepsilon$

$x_4=g_2(x_3)= 1.1495$, $/x_4-x_3/=0.0072>\varepsilon$

$x_5=g_2(x_4)= 1.1472$, $/x_5-x_4/=0.0023<\varepsilon$

La solution est $x_5= 1.15$.

2.3 Méthode de Newton

Principe :

Soit l'intervalle [*a* , *b*] pour lequel f(x) possède un changement de signe (fa).f(b)<0) et :

- f'(x) ≠0 (f est monotone sur [a,b])
- f''(x) ≠0 (f''(x)<0 ou f''(x)>0)
- Partant d'un point x_0 qui satisfait $f(x_0).f''(x_0)>0$ ($x_0 \in [a,b]$)

Alors la suite :

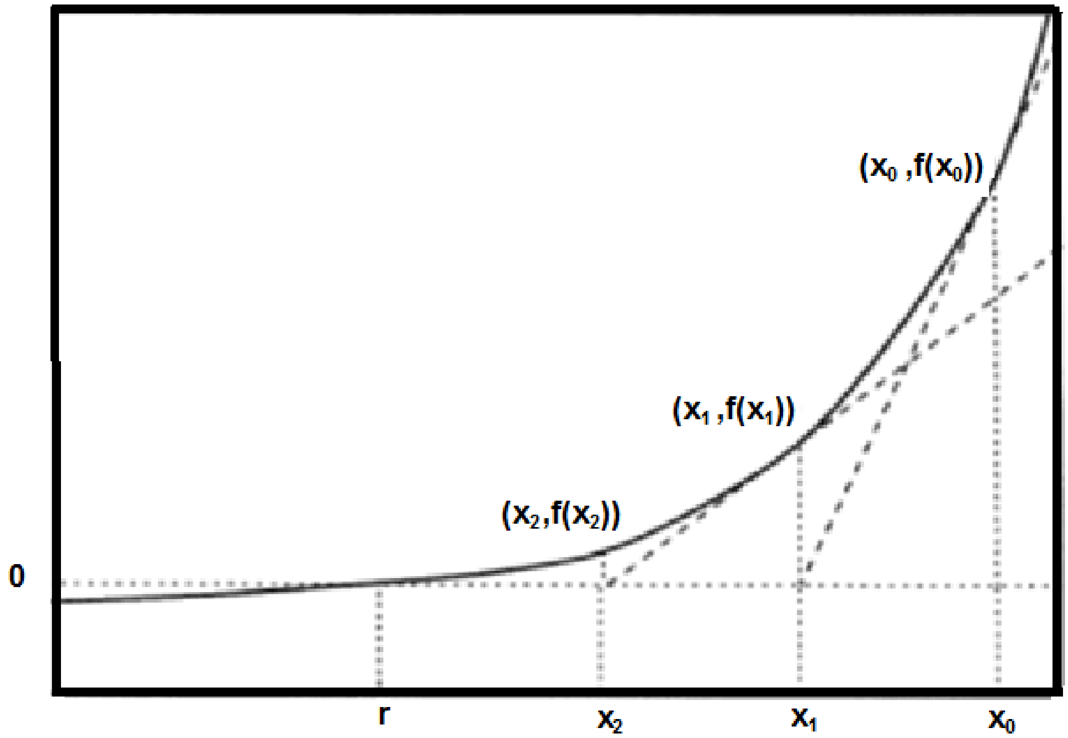
$$x_{i+1} = xi - f(x_i)/f'(x_i) \quad , i=0,1,\ldots.$$

Converge vers l'unique solution α de f(x).

Interprétation géométrique :

Soit la fonction f(x) représentée sur la figure suivante :

La droite tangente à la courbe en $(x_0,f(x_0))$ de pente $f'(x_0)$ a pour équation : $y= f(x_0)+ f'(x_0)(x-x_0)$



Cette droite coupe l'axe des x en (x_1, y=0), c'est-à-dire :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Qui devient la nouvelle valeur estimée de la solution. On recommence la même chose avec le point ((x_1,f(x_1)) et ainsi de suite jusqu'à ce que la condition $|x_{i+1}-x_i| < \varepsilon$ soit satisfaite.

Exemple :

Soit la fonction : $f(x) = e^x - 4\cos(x) = 0$

Trouver la racine de l'équation comprise dans l'intervalle **[π/4, π/2]** avec $\varepsilon=10^{-5}$.

Solution :

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} - 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.63514<0 \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$ **- 4cos(**$\frac{\pi}{2}$**) =4.8104>0**

$$\forall \mathbf{x} \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[, \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{e^x} + \mathbf{4sin}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{F}''(\mathbf{x}) = \mathbf{e^x} + \mathbf{4cos}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$$

Le théorème de Newton est vérifié. En partant de $x_0=\frac{\pi}{2}$, la série de Newton donnée par :

$$\mathbf{x_{i+1}} = \mathbf{x_i} - \frac{\mathbf{f(x_i)}}{\mathbf{f'(x_i)}}$$

Converge vers l'unique solution α de f(x) sur [π/4,π/2]

Partant de $x_0=\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.8104>0 \\ \\ \mathbf{f}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.8104>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \mathbf{f}''\left(\frac{\pi}{2}\right) < \mathbf{0}$$

Calculons les itérations avec le test d'arrêt $|x_{i+1}-x_i| < \varepsilon$.

1ère itération : $x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0}-4\cos(x_0)}{e^{x_0}+4\sin(x_0)}$ =1.02480, $|x_1-x_0|=0.54599>10^{-5}$

2ème itération : $x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1}-4\cos(x_1)}{e^{x_1}+4\sin(x_1)}$ =0.91046, $|x_2-x_1|=0.11434>10^{-5}$

3ème itération : $x_3=0.90480$, $|x_3-x_2|=0.00566>10^{-5}$

4ème itération : $x_4=0.90479$, $|x_4-x_3|=0.00001=10^{-5}$

5ème itération : $x_5=0.90479$, $|x_5-x_4|=0.00000<10^{-5}$.

Ainsi , la solution approchée de f(x)=0 est α=0.9048.

- **Applications :**

- Calcul de la N^{ème} racine d'un nombre a :

$x = \sqrt[N]{a}$ $\rightarrow x^N - a = 0 = f(x)$

D'après la suite de Newton :

$x_{i+1} = xi - f(x_i)/f'(x_i)$, i=0,1,….

$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - a}{n x_i^{n-1}} = \frac{1}{n}((n-1)x_i + \frac{a}{x_i^{n-1}})$

Exemple : calcul de la racine carrée de 2

$x\varepsilon[1,2]$, a=2,n=2, $\varepsilon=10^{-4} < 0.5.10^{-3}$

$f(x)=x^2-2=0$, $f'(x)=2x>0$ $\forall$ ε[1,2], $f''(x)=2>0$ $\forall$ ε[1,2],

f(1)=-1,f(2)=2 $\rightarrow x_0=2$.

$$x_{i+1}=1/2(x_i+2/x_i^{\ 2-1})$$

$x_1=1/2(2+1)=1.5$, $/x_1-x_0/=0.5>\varepsilon$

$x_2=1/2(1.5+2/1.5)=1.4167$, $/x_2-x_1/=0.083>\varepsilon$

$x_3=1.4142$, $/x_3-x_2/=0.0025>\varepsilon$

$x_4=1.4142$, $/x_4-x_3/=0.0<\varepsilon$

La solution est: x=1.414

3. Résolution des systèmes d'équations linéaires

De façon générale, la résolution d'un système d'équations linéaires consiste à trouver un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ solution de :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

……………………………………

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$

Ou sous forme matricielle :

$$AX=B$$

Ou encore sous forme réduite :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,,\ i=1,n$$

Où A est la matrice :

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \ldots a_{3n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

A et B sont connus.

Il existe deux grandes classes de méthodes pour résoudre ce type de systèmes :

1. les méthodes directes qui déterminent explicitement la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques,
2. les méthodes itératives qui consistent à générer une suite qui converge vers la solution du système.

3.1 Méthodes directes

Avant d'aborder ces méthodes, ils existent des systèmes linéaires qui sont faciles à résoudre.

- Système triangulaire inférieur :

C'est un système dont la matrice A est triangulaire inférieure c'est-à dire :

$a_{ij}=0$ si $j>i$, ainsi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,,\ i=1,n \text{ ou}$$

$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j+a_{ii}\, x_i+\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, $i=1,n$. Or A est M.T.I, le système devient :

$$x_i=(b_i- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)/a_{ii}\ ,\ i=1,\dots,n$$

La solution se déduit du haut vers le bas.

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$x_{1=} \ \dfrac{b_1}{a_{11}} = \ \dfrac{9}{3} = 3$

$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} = \frac{7-(1)(3)}{2} = 2$

$x_3 = \ \frac{b_3 \, - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = \frac{14-(3)(3)-(2)(2)}{1} = 1$

- Système triangulaire supérieur :

C'est un système dont la matrice A est triangulaire supérieure c'est-à dire :

a_{ij}=0 si j<i , ainsi le système devient :

$$x_i=(b_i- \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j)/a_{ii} \ ,i=n ,\ldots,1$$

La solution se déduit du bas vers le haut.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x_{3=} \ \dfrac{b_3}{a_{33}} = \ \dfrac{-1}{-1} = 1$

$x_2 = \frac{b_2 - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{-4-(-6)(1)}{1} = 2$

$x_1 = \ \dfrac{b_3 \ - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \dfrac{10-(1)(2)-(2)(1)}{2} = 3$

- Système diagonal :

A est diagonal, c'est-à-dire a_{ij}=0 si i≠j.

La solution est $x_i=b_i/a_{ii}$, i=1,…,n

Si A est quelconque, alors plusieurs méthodes sont possibles :

3.1.1 Méthode de Cramer :

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \; et \; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-3} = 2$$

On peut généraliser cette méthode pour un système de n équations mais cela va nécessiter beaucoup de calculs et de techniques.

3.1.2 Méthode de Gauss :

Cette méthode consiste à transformer le système AX=B où A est une matrice quelconque en un système équivalent A'X=B' où A' est une M.T.S, facile à résoudre.

Les transformations vont s'opérer sur A et B. Afin de simplifier l'algorithme, on forme la matrice augmentée [A,B] c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} a_{11}\; a_{12}\; a_{13} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\; a_{22}\; a_{23} \dots a_{2n} & b_2 \\ a_{31}\; a_{32}\; a_{33} \dots a_{3n} & b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \\ a_{n1}\; a_{n2}\; a_{n3} \dots a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Certaines transformations sont permises et n'affectent pas la solution d'un système linéaire. Si nous désignons E_i l'équation (ligne) i du système linéaire et E_j l'équation (ligne) j, alors ces opérations peuvent être résumées comme suit:

1- $E_i \leftrightarrow E_j$: intervertir la ligne i et la ligne j.

2- $E_i \leftarrow \lambda E_i$: Multiplier la ligne i par un nombre non nul.

3- $E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j$: remplacer la ligne i par sa somme avec la ligne j multipliée par un nombre non nul.

Ainsi, la méthode de Gauss repose sur ces transformations et plus exactement sur la 3$^{\text{éme}}$.

Il y a n-1 étapes où n est le nombre d'inconnues.

L'algorithme :

$E_i \leftarrow E_i - a_{ik}/a_{kk}\, E_k \quad \begin{cases} k = 1, n-1 & \text{(étapes)} \\ i = k+1, n & \text{(lignes)} \end{cases}$

Les transformations s'opérant sur les coefficients :

$$A_{ij}^{(k+1)} = A_{ij}^{(k)} - \frac{A_{ik}^{(k)}}{A_{kk}^{(k)}} A_{kj}^{(k)} \quad \begin{cases} k = 1, n-1 \\ i = k+1, n \\ j = k+1, n+1 \end{cases}$$

La solution est :

$$x_i = \left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right)/a_{ii}\ ,\ i = n, \ldots, 1$$

Le déterminant est :

$$\text{Det} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

La matrice augmentée :

$$[A\ \ B] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

K=1,

$$\begin{array}{l} \\ i=2,\quad E_2^{(1)} \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ i=3,\quad E_3^{(1)} \leftarrow E_3 - 3E_1 \\ i=4,\quad E_4^{(1)} \leftarrow E_4 - 4E_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

K=2,

$$\begin{array}{l} \\ \\ i=3,\quad E_3^{(2)} \leftarrow E_3 - 2E_2 \\ i=4,\quad E_4^{(2)} \leftarrow E_4 - 7E_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & 0 \end{pmatrix}$$

K=3,

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ i=4,\ E_4^{(3)} \leftarrow E_4 + E_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

Solutions :

$x_4= x_3=x_2=0$ et $x_1=1$.

det A=1(-1)(-4)(40)=160.

3.1.2 Méthode de Jordan ou Gauss- Jordan:

Cette méthode est une variante de la méthode de Gauss. Elle consiste à transformer le système AX=B où A est une matrice quelconque en un système équivalent A'X=B' où A' est la matrice identité de même ordre que A.

La méthode comporte n étapes, chacune comprend deux opérations : Normalisation et Réduction.

L'algorithme :

$$\left.\begin{array}{l} \text{-Normalisation : } E_k^{(k)} \leftarrow E_k^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \\ \text{-Réduction : } E_i^{(k)} \leftarrow E_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} E_k^{(k)} \begin{cases} i = 1, n \\ i \neq k \end{cases} \end{array}\right\} \quad k=1,n$$

Les transformations s'opérant sur les coefficients :

$$\left.\begin{array}{l} \text{-Normalisation : } a_{kj}^{(k)}= a_{kj}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} \ \{\ j = k + 1, n + 1 \\ \text{-Réduction : } a_{ij}^{(k=}a_{ij}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)} \begin{cases} i = 1, n \\ i \neq k \\ j = k + 1, n + 1 \end{cases} \end{array}\right\} \quad k=1,n$$

La solution est :

$$x_i=a_{i,n+1} \ , i=1,n$$

Le déterminant est :

$$\text{Det} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Exemple :

Soit le système suivant :

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 \quad = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11$$

$$A^{(0)}=[A\ B]=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

k=1,

-Normalisation : $E_1^{(1)} \leftarrow E_1/a_{11}$, $a_{11}= 1$ reste inchangée.

-Réduction : $E_i^{(1)} \leftarrow E_i - a_{i1} E_1^{(1)}$, $\begin{cases} i = 1,3 \\ i \neq 1 \end{cases}$

i=2, $E_2^{(1)} \leftarrow E_2 - a_{21} E_1^{(1)}$, $a_{21}=2$

i=3, $E_3^{(1)} \leftarrow E_3 - a_{31} E_1^{(1)}$, $a_{31}=3$

après la première étape, on obtient :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

k=2,

-Norm : $E_2^{(2)} \leftarrow E_2/a_{22}$, $a_{22}= -4$, la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

- Réd : $E_i^{(2)} \leftarrow E_i - a_{i2}\, E_2^{(2)}$, $\begin{cases} i = 1,3 \\ i \neq 2 \end{cases}$

i=1, $E_1^{(2)} \leftarrow E_1 - a_{12}\, E_2^{(2)}$, $a_{12}=3$

i=3, $E_3^{(2)} \leftarrow E_3 - a_{32}\, E_2^{(2)}$, $a_{32}=-7$

Après la 2ème étape elle devient :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 15/2 & 15/2 \end{pmatrix}$$

k=3,

-Norm : $E_3^{(3)} \leftarrow E_3/a_{33}$, $a_{33}= 15/2$ devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-Réd : $E_i^{(3)} \leftarrow E_i - a_{i3}\, E_3^{(3)}$) $\{\ i = 1,2$

i=1, $E_1^{(3)} \leftarrow E_1 - a_{13}\, E_3^{(3)}$, $a_{13}=-3/2$

i=2, $E_2^{(3)} \leftarrow E_2 - a_{23}\, E_2^{(2)}$, $a_{23}=3/2$

Après la dernière étape, le système devient :

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution est :

$$x_i=(a_{i,n+1}),\ i=1,n$$

n=3

i=1, $x_1=a_{14}=3$

i=2, $x_2=a_{24}=-2$

i=3, $x_3=a_{34}=1$

det = $\prod_{k=1}^{n} a_{kk}$

=1.(-4).(15/2)=-30

*** Calcul de la matrice inverse par la méthode de Jordan:**

L'algorithme de JORDAN transforme le système linéaire AX = B où A est une matrice quelconque en système A'X = B 'où A' est la matrice identité. C'est comme si on multiplie la matrice augmentée [A, B] par A^{-1}.

En effet, $A^{-1}[A,B]=[A^{-1}.A,A^{-1}B]=[I,X]$

Ainsi, pour calculer l'inverse de la matrice A, au lieu de former la matrice augmentée [A, B], on forme [A, I] où I est matrice identité de même ordre que A. En appliquant l'algorithme de Jordan, on aura :

$$A^{-1}[A,I]= [A^{-1}.A,A^{-1}I]=[I,A^{-1}]$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

N=3, donc 3 étapes

Matrice augmentée .

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k=1,

-Norm : ($a_{11}=1$), reste inchangée

-Réd :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k=2,

-Norm :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-Réd :

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 15/2 & 1/2 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$$

k=3

-Norm :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

-Réd :

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/10 & -1/5 \\ 1/15 & -7/30 & 2/15 \end{pmatrix}$$

3.1.3 Méthode Décomposition LU :

a- Méthode de Crout:

Cette méthode consiste à factoriser la matrice A du système AX=B en un produit de deux matrices triangulaires L et U où L est une M.T.I et U est une M.T.S dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1. Le système AX=B devient deux systèmes triangulaires faciles à résoudre :

$$AX=B \leftrightarrow LUX=B \leftrightarrow \begin{cases} LY = B & (1) \\ UX = Y & (2) \end{cases}$$

La solution du système (1) est :

$$y_i=(b_i- \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}x_j)/L_{ii} \;, i=1 ,n$$

Une fois Y est déterminé, la solution X est donnée par :

$$x_i=(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}x_j) \;, i=n ,1$$

Algorithme :

$u_{ii}=1$

$$\left.\begin{array}{l} l_{ik}=a_{ik}- \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}u_{jk} \;, i=k,n \\ \\ u_{kj}=(a_{kj}-\sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}u_{ij})/l(k,k) \;, j=k+1,n \end{array}\right\} k=1,n$$

$y_i=(b_i- \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}y_j)/L_{ii} \;, i=1,n$

$x_i=(y_i- \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}x_j) \;, i=n,1$

det A=det (LU)=det(L).det(U)=det L= $\prod_{i=1}^{n} l_{ii}$

Exemple:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

N=3 → 3étapes

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k=1

première colonne de L : $l_{i1}=a_{i1}-\sum_{j=1}^{0} l_{ij}u_{jk}$, i=1,3

$l_{11}=a_{11}=3$, $l_{21}=a_{21}=1$, $l_{31}=a_{31}2$

Première ligne de U :

$U_{1j}=(a_{1j}-\sum_{i=1}^{0} l_{ki}u_{ij})/l_{11}$, j=2,3

$u_{12}=a_{12}/l_{11}=-1/3$, $u_{13}=a_{13}/l_{11}=2/3$

k=2

$l_{i2}=a_{i2}-\sum_{j=1}^{1} l_{ij}u_{j2}$,i=2,3

$l_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12}=2-1(-1/3)=7/3$

$l_{32}=a_{32}-l_{31}u_{12}=-2-(2)(-1/3)=-4/3$

$U_{2j}=(a_{2j}-\sum_{i=1}^{1} l_{2i}u_{ij})/l_{22}$, j=3

$U_{23}=(a_{23}-l_{21}u_{13})l_{22}=(3-1(2/3))/(7/3)=1$

k=3

$l_{33=}a_{33}-l_{31}u_{13}-l_{32}u_{23}=-1-2(2/3)-(-4/3).1=-1$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution de LY=B :

- $y_1=b_1/L_{11}=12/3=4$
- $y_2=\frac{b_2 - L_{21}y_1}{L_{22}} = \frac{11-(1)(4)}{7/3} = 3$
- $y_3=\frac{b_3 - L_{31}y_1 - L_{32}y_2}{L_{33}} = \frac{2-(2)(4)-(-\frac{4}{3})(3)}{(-1)} = 2$

Résolution de UX=Y :

- $x_3=y_3=2$
- $x_2 = y_2 - u_{23}x_3=3-(1)(2)=1$
- $x_3=y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3=4-(-1/3)(1)-(2/3)(2)=3$

La solution est :

$$X=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

det A=det L=$\prod_{i=1}^{n} l_{ii}$=3.(7/3).(-1)=-7

b- Méthode de Choleski :

Cette méthode est applicable aux systèmes à matrices symétriques définies positives ($\det(\boldsymbol{A}) > \boldsymbol{0}$). $\boldsymbol{A}$ = LL$^{\boldsymbol{t}}$ ou L est triangulaire inférieure et L$^{\boldsymbol{t}}$ la matrice transposée de L.

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & & & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ 0 & 0 & & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Algorithme :

Pour k=1,…,n

$$L_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ik}^2}$$

$$L_{jk} = \frac{a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} L_{ki}\ L_{ji}}{L_{kk}}, j = k+1, n$$

On résout ensuite le système LY=B puis CX=Y où $C=L^t$.

Det A= det $(L.\ L^t) = \prod_{i=1}^{n} L_{ii}^2$

Un exemple. Soit la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 2 \\ -6 & 10 & -15 & -3 \\ 8 & -15 & 26 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} & L_{41} \\ 0 & L_{22} & L_{32} & L_{42} \\ 0 & 0 & L_{33} & L_{43} \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} \end{pmatrix}$$

k=1,

$L_{11}^2 = 4 \rightarrow L_{11}=2$

$L_{21}=-6/2 \rightarrow L_{21}=-3$

$L_{31}=8/2 \rightarrow L_{31}=4$

$L_{41}=2/2 \rightarrow L_{41}=1$

k=2,

$L_{22}=(a_{22}-L_{21}^2)^{1/2} = (10-(-3)^2)^{1/2} = 1$

$L_{32}=(a_{23}-L_{21}L_{31})/\ L_{22}=-15-(-3)(4)=-3$

$L_{42}=(a_{24}-L_{21}L_{41})/\ L_{22}=-3-(-3)(1)=0$

k=3,

$L_{33}= (a_{33}-L_{31}^2- L_{32}^2)^{1/2} = (26-(4)^2-(3)^2)^{1/2}=1$

$L_{43}=(a_{34}-L_{31}L_{41}- L_{32}L_{42})/\ L_{33}=(-1-(4)(1)-(-3).0)=-5$

k=4,

$L_{44}= (a_{44}-L_{41}^2- L_{42}^2- L_{43}^2)^{1/2} =(62-(1)^2-0^2-(-5)^2)^{1/2}=6$

$\det A=(2.1.1.6)^2=144$

- $LY = B \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, $L^T X = Y \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.1.4 Méthode du pivot :

Nous avons supposé pour les méthodes précédentes que les éléments a_{kk} appelés pivots étaient non nuls mais cette hypothèse n'est pas toujours vraie, de plus la division par de petits coefficients conduit à de grosses erreurs de calcul. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solution exacte est $x_1=1{,}0001$ et $x_2=0{,}9999$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient :

$x_1=0$ et $x_2=1$

C'est pourquoi on utilise la méthode du pivot.

a- Pivot partiel :

$$\left|a_{lk}^{(k)}\right| = \max_{k \le i \le n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$$

Si $l \neq k$, on permute les lignes l et k

b-pivot total :

$$|a_{lm}| = max \ |a_{ij}| \begin{cases} i = k, n \\ j = k, n \end{cases}$$

Si l≠k, on permute les lignes l et k.

Si m≠k, on permute les colonnes m et k (changement des positions des inconnues).

Exemple : résoudre le système suivant par la méthode de Gauss avec pivot partiel :

$$[A\ B] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

K=1

Recherche du pivot :

$|a_{l1}|=\max |a_{i1}|$, i=1,3

$=\max(|a_{11}|,|a_{21}|,|a_{31}|)=|a_{21}| \rightarrow l=2\neq1$, on permute les lignes 1 et 2, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme de Gauss pour k=1, on obtient :

$$\boldsymbol{E_2 \leftarrow (E_2 - \frac{1}{3}E_1), E_3 \leftarrow (E_3 - \frac{2}{3}E_1)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 7/3 & -7/3 \end{pmatrix}$$

k=2,

$|a_{l2}|=\max |a_{i2}|$, i=2,3

$=\max(|a_{22}|,|a_{32}|)=|a_{32}| \rightarrow l=3\neq 2$, on permute les lignes 2 et 3, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -7/3 & 7/3 & -7/3 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Appliquons l'algorithme de Gauss pour k=2, on obtient :

$$\boldsymbol{E_3 \leftarrow (E_3 + \frac{1}{7}E_2)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -7/3 & 7/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La solution est :

$X=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $det=(-1)^p\prod_{i=1}^{n} aii$ où p est le nombre de permutations.

3.2 Méthodes itératives

Quand n est assez grand les méthodes directes ne sont plus envisageables vu le nombre très grand d'opérations à effectuer qui engendre la propagation des erreurs d'arrondi. On a alors recours
aux méthodes itératives qui consistent à générer à partir d'un vecteur initial $X^{(0)}$ une suite $X^{(k)}$ qui converge sous certaines conditions vers la solution X du système : $\lim_{k\to\infty} X^{(k)}=X$.

3.2.1 Méthode de Jacobie :

Soit le système :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$

……………………………………=..

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$

Transformons le système en supposant que les éléments du pivot sont non nuls ($a_{ii}\neq 0$, i=1,n).

$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 + \ldots - a_{1n}x_n)/a_{11}$

$x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 + \ldots - a_{2n}x_n)/a_{22}$

……………………………………

$x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 + \ldots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn}$

Ou à l'itération (k)

$x_1^{(k)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} + \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)})/a_{11}$

$x_2^{(k)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} + \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)})/a_{22}$

……………………………………

$x_n^{(k)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - a_{n2}x_2^{(k-1)} + \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)})/a_{nn}$

Ou sous la forme réduite :

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right), i = 1, \ldots, n.$$

Exemple:

Soit le système :

$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17$

$2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18$

La méthode de Jacobie s'écrit :

$\boldsymbol{x_1^k = \frac{1}{3}(2 - x_2^{k-1} + x_3^{k-1})}$

$\boldsymbol{x_2^k = \frac{1}{5}(17 - x_1^{k-1} - 2x_3^{k-1})}$

$\boldsymbol{x_3^k = -\frac{1}{6}(-18 - 2x_1^{k-1} + x_2^{k-1})}$

Avec $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,000000	0,000000	0,000000
1	0,666667	3,400000	3,000000
2	0,533333	2,066667	2,655556
3	0,862963	2,231111	2,833333
4	0,867407	2,094074	2,915802
5	0,940576	2,060198	2,940123
………			
10	0,995585	2,004067	2,996331

les valeurs convergent vers la solution $(1\ 2\ 3)^t$

3.2.2 Méthode de Gauss-Seidel :

Il s'agit d'une méthode améliorée de la méthode Jacobi. Lors du calcul de la valeur de $x_i^{(k+1)}$ au lieu d'utiliser les éléments (i-1) du vecteur $X^{(k-1)}$, nous utilisons les éléments (i-1) de $X^{(k)}$.

Pour la méthode Jacobi, la formule réduite est :

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right), i = 1, \ldots, n.$$

Laquelle peut s'écrire :

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right), i = 1, \ldots, n.$$

Pour Gauss-Seidel, la formule est :

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k-1)}\right), i = 1, \dots, n.$$

Exemple : soit le système suivant :

Soit le système :

$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17$

$2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18$

La méthode de Jacobie s'écrit :

$$\boldsymbol{x_1^k = \frac{1}{3}(2 - x_2^{k-1} + x_3^{k-1})}$$

$$\boldsymbol{x_2^k = \frac{1}{5}(17 - x_1^k - 2x_3^{k-1})}$$

$$\boldsymbol{x_3^k = -\frac{1}{6}(-18 - 2x_1^k + x_2^k)}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,000000	0,000000	0,000000
1	0,666667	3,266667	2,677778
2	0,470370	2,234815	2,784321
3	0,849835	2,116305	2,930561
4	0,938086	2,040158	2,972669
5	0,977503	2,015432	2,989929
6	0,991499	2,005729	2,996212

……………………………………………….

10	0,999833	2,000113	2,999926

3.2.3 Formes matricielles :

On décompose la matrice A en A=D+L+U où :

- D est une matrice diagonale.
- L est une matrice triangulaire strictement inférieure.
- U est une matrice triangulaire strictement supérieure.

Pour Jacobie :

$AX=B$

$(D+L+U)X=B$

$DX=-(L+U)X+B$

$X=-D^{-1}(L+U)X+D^{-1}B=T_jX+V_j$

ou $\mathbf{X^{(k)}=T_jX^{(k-1)}+V_j}$

T_j est la matrice d'itération de Jacobie.

Pour GAUSS- SEIDEL

$X^{(k)}=D^{-1}(B-L\,X^{(k)}-UX^{(k-1)})$

$(L+D)\,X^{(k)}=B-U\,X^{(k-1)}$

$\mathbf{X^{(k)}=-(D+L)^{-1}U\,X^{(k-1)}+(D+L)^{-1}B=T_{GS}\,X^{(k-1)}+V_{GS}}$

T_{GS} est la matrice d'itération de GAUSS- SEIDEL.

Théorème:

Si la A est une matrice à diagonale dominante ($|\boldsymbol{a_{ii}}| > \sum_{\boldsymbol{j\neq i}}|\boldsymbol{a_{ij}}|$**),** les méthodes de JACOBI et GAUSS-SEIDEL convergent.

- Corolaire (conséquence) :

$si \ |T| < 1$, les deux méthodes convergent.

4. Intégration numérique

On veut évaluer l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle [a, b]. Si l'on connait sa primitive F, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ où } F' = f$$

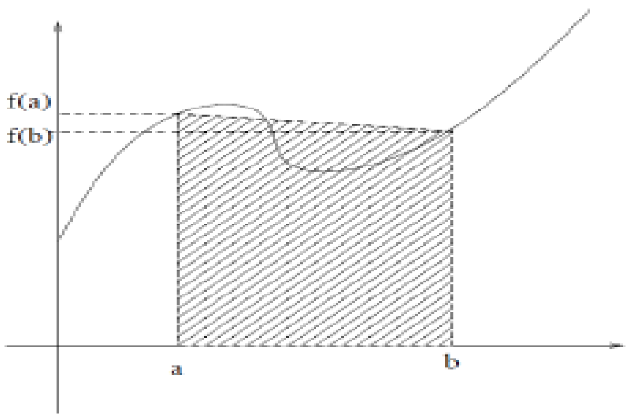
Mais dans de nombreux cas, f est soit trop compliquée pour être intégrée, soit seulement donnée par une table de valeurs. Nous cherchons donc une valeur approchée à l'aide de sommes finies :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

où les xi, i = 0,…, n sont appelés points d'intégration et les αi, i =0,…,n sont les poids de la formule de quadrature.

4.1 Méthode des trapèzes

Pour évaluer numériquement $\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx}$, on divise l'intervalle borné [a, b] en n sous intervalles $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ de même longueur h = (b−a)/n et on considère les points d'intégration $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, ..., $x_i = x_0 + ih$ (i = 0,…, n), $x_n = b$.



Si n = 1, x_0 = a, x_1 = b, on obtient :

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx \frac{\boldsymbol{(b-a)}}{\boldsymbol{2}}\big(\boldsymbol{f(a)+f(b)}\big).$$

$$(\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{(petite\ base + grande\ base) \times Hauteur}}{\boldsymbol{2}})$$

C'est la formule simple des trapèzes sur l'intervalle [a, b].

De manière générale, l'aire I(f) comprise entre [a, b] et le graphe de f peut être approchée par la somme des aires des n trapèzes induits par les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

$$\boldsymbol{I} = \int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int_{x_0=a}^{x_1} \boldsymbol{f(x)dx} + \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{f(x)dx} + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} \boldsymbol{f(x)dx}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \boldsymbol{f(x)\,dx} \approx \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}} \sum_{i=0}^{n-1} (\boldsymbol{f(x_i) + f(x_{i+1})})$$

$$= \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}} (\boldsymbol{f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)})$$

$$= \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}} (\boldsymbol{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)})$$

C'est la formule composite des trapèze sur l'intervalle [a, b].

Exemple :

Soit f(x) = x^2, a = 0, b = 1, on prend n = 4 subdivisions.

donc h = (b–a)/n=1/4, x_0 = a = 0, x_1 = 1/4 , x_2 = 2/4=1/2 ,x_3=3/4, x_4 = b = 1 avec y_0 = f(x_0) = 0, y_1 = f(x_1) = 1/16, y_2 = f(x_2) = 1/4 et y_3 =f(x_3)= 9/16 et y_4= f(x_4) = 1.

I(f) =$\int_1^1 x^2 dx \approx \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{2}} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = 1/8(0 + 2\frac{1}{16} + 2\frac{1}{4} + 2\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{16}} + \boldsymbol{1})$ = 11/32 =0.344

4.2 Méthode de Simpson :

La méthode d'intégration de Simpson est basé sur une division de l'intervalle [a, b] en sous intervalles de taille fixe h et ensuite de diviser la longueur h en 3 Tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{b=x_{2m}} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))+ \frac{h}{3}(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))+\ldots+ \frac{h}{3}(f(x_{2m-2})+4f(x_{2m-1})$$

$$+ f(x_{2m}))$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_{2m})+2(f(x_2)+4f(x_4)+f(x_{2m-2})+4(f(x_1)+f(x_3)+f(x_{2m-1}))]$$

$$=\frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_{2m=n})+2 \sum_{i\ pair} f(x_i)+4 \sum_{i\ impair} f(x_i)]$$

Application :

n=4, $f(x)=x^2$, a=0,b=1,h=1/4, d'après la formule de Simpson :

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} \approx \boldsymbol{I_4}(f) = \frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_4)+2f(x_2)+4(f(x_1)+f(x_3))]$$

$$=\frac{1}{12}(0+1+5/2+1/2)=1/3.$$

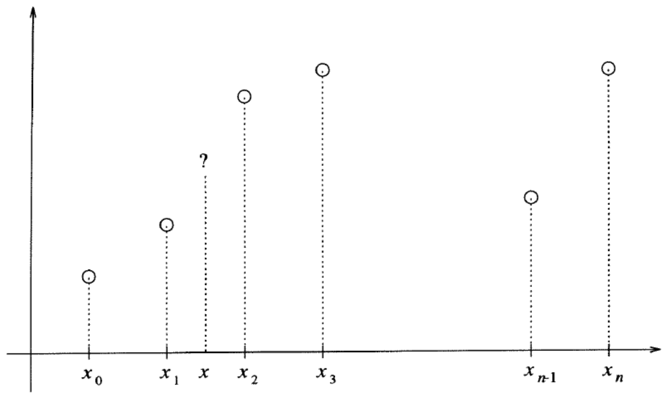
Sachant que la valeur exacte est 1/3.

5. L'interpolation

Le but du problème d'interpolation est de déterminer un polynôme qui passe par les points (x_i, y_i) donnés, c'est-à-dire :

$P(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Les points (x_i, y_i) sont appelés les points d'interpolation.



On peut écrire le polynôme P_n comme suit :

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x_n.$$

5.1 Interpolation de Vandermonde :

Du fait que $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, n$, on obtient un système linéaire de $(n+1)$ équations en $(n+1)$ inconnues. Ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

La matrice porte le nom de matrice de Vandermonde.

Exemple :

Calculer le polynôme passant par les points (0,1),(1,2),(2,9) et (3,28).

Le polynôme est au plus de degré 3.

Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \\ 28 \end{bmatrix}$$

Dont la solution est (1 0 0 1). Le polynôme recherché est :

$P_3(x) = 1+x^3$

5.2 Interpolation de Lagrange :

Etant donnes n+1 points $x_0,\dots,x_n$ distinct et n+1 valeurs correspondantes $y_0,\dots,y_n$, Le polynôme d'interpolation est donné par :

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; L_i(x)$ où $L_i(x)$ est le polynôme de Lagrange donnée par :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, \dots, n.$$

Reprenons le même exemple.

$$P_3(x) = 1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 9\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 28\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0(3-1)(3-2)}$$

C'est-à-dire : $P_3(x)=x^3+1$

5.3 Interpolation de Newton :

Le polynôme d'interpolation de Newton est donnée par :

$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$

Détermination des coefficients a_i :

$P_n(x_0) = a_0= f(x_0)$.

$P_n(x_1) = f(x_1)$, c'est-à-dire :

$P_n(x_1) =a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

On définit les premières différences divisées de la fonction f(x) par :

$f[x_i,x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$. Ainsi $a_1 = f[x_0,x_1]$

Le coefficient a_2 est déterminé par :

$P_n(x_2) = a_0+a_1(x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)$

ou encore $P_n(x_2) = a_0+ f[x_0,x_1] (x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)$

D'où :

$$a_2 = \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(f(x_2) - f(x_0) - f[x_0, x_1](x_2 - x_0))$$

$$= \frac{1}{(x_2-x_0)}\left(\frac{f(x_2)-f(x_0)}{(x_2-x_1)} - \frac{f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_1)}\right)$$

$$= \frac{1}{(x_2-x_0)}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_0)}{(x_2-x_1)} - \frac{f[x_0,x_1](x_2-x_0)}{(x_2-x_1)}\right)$$

$$= \frac{1}{(x_2-x_0)}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{(x_2-x_1)} + \frac{(f(x_1)-f(x_0))(x_1-x_0)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)} - \frac{f[x_0, x_1](x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)}\right)$$

$$= \frac{1}{(x_2-x_0)}\left(f[x_1, x_2] + f[x_0, x_1]\left(\frac{(x_1-x_0)}{(x_2-x_1)} - \frac{(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(x_2 - x_0)}(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]) = f[x_0, x_1, x_2]$$

Sachant que les deuxièmes différences divisées de la fonction f(x) sont définies à partir des premières différences divisées par la relation :

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1},, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

De même, les nièmes différences divisées sont définies à partir des (n-1) ièmes différences divisées :

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1,, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_{i0}}$$

De manière générale :

$a_i = f[x_0,x_1,\ldots,x_i]$ pour $0 \leq i \leq n$

Une fois les coefficients a_i connus, on peut évaluer le polynôme de Newton :

La manière la plus simple pour calculer les coefficients a_i consiste à construire une table dite de différences divisées.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f(x_3)$			

la table des différences divisées pour les points (0,1),(1,2),(2,9) et (3,28) est :

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	1	1	3	1

1	2	7	6
2	9	19	
3	28		

Donc,

$P_3(x) = 1+ 1(x-0)+3(x-0)(x-1)+1(x-0)(x-1)(x-3) = x^3+1$

6. Résolution Numérique des équations différentielles ordinaires (EDO).

1. Dérivation Numérique :

La dérivation numérique consiste à calculer une approximation de la dérivée d'une fonction à partir de valeurs discrètes.

Pour une fonction f(x)dérivable en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

On effet, en utilisant le développent de Taylor :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \cdots$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \cdots$$

- **Différence avant (ordre 1)**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- **Différence arrière (ordre 1)**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

- **Différence centrée (ordre 2)**

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

- **Dérivée seconde**

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

2. EDO du premier ordre :

$y'(x)=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$

On cherche une approximation de y(t) aux points :

$x_i=x_0+ih$ où h est le pas de discrétisation.

2.1. Méthode d'Euler explicite

$y_{i+1}=y_i+h\, f(x_i,y_i)$ (obtenue à partir du développement de Taylor d'ordre 1)

Exemple :

$y'=y$, $y(0)=1$, $h=0.1$, $y_1=1+0.1\cdot1=1.1$, y_2 ,….

2.2. Méthode d'Euler améliorée (Heun / RK2)

1. **Prédiction (Euler explicite)** :

   $y^\star=y_i+hf(x_i , y_i)$

2. **Correction** :

   $y_{i+1}=y_i+h/2(f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y^\star))$

2.3. Méthodes de Runge–Kutta (RK4)

$k_1=f(x_i,y_i)$

$k_2=f(x_i+h/2, y_i+hk_1/2)$

$k_3=f(x_i+h/2,y_i+hk_2/2)$

$k_4=f(x_i+h,\ y_i+hk_3)$

$y_{i+1}=y_i+h/6(k_1+2k_2+2k_3+k4)$

3. EDO du second ordre :

Une équation différentielle ordinaire (EDO) du second ordre s’écrit :

y"(x) = f(x, y(x), y'(x))

Avec conditions initiales :

$y(x_0)=y_0$ et $y'(x_0)=u_0$

Pour la résoudre numériquement, on doit la transformer en un système du premier ordre.

On pose u(x) = y’(x) on aura :

$$\begin{cases} u'(x) = y''(x) = f(x, y(t), u(x)) \\ y'(x) = u(x) \end{cases}$$ avec $y(x_0)=y_0$ et $u(x_0)=u_0$

3.1. Méthode d’Euler :

$y_{i+1=}\ y_i + h\ u_i$

$u_{i+1} = u_i + h\ f(x_i,y_i,u_i)$

Exemple :

y’’+y=0 avec y(0)=0 et y’(0)=1=u_0, (x_0=0) , h=0.1, $x_{i+1}=x_i+h$, i=1,2

u = y’ et u’= y’’= -y =f(x,y,u)

$y_1=y(0.1)=y_0(0)+hu_0=0+0.1*1=0.1$

$u_1=u(0.1) = u_0 + hf(x_0,y_0,u_0)=1+0.1*(0)=1$

$y_2=y(0.2)=y_1+hu_1=0.1+0.1*1=0.2$

$u_2=y(0.2) = u_1 + hf(x_1,y_1,u_1)=1+0.1*(-0.1)=0.99$

la solution exacte est sin(x) avec sin(0.1)=0.0998 et sin(0.2)=0.1986

*** Méthode d'Euler modifiée:**

- Prédiction (Euler simple)

$y^{*}= y_i + h\, u_i$

$u^* = u_i + hf(x_i,y_i,u_i)$

- Correction

$y_{i+1}= y_i + h/2\ (u_i + u^*)$

$u_{i+1}= u_i + h/2\ (f(x_i,y_i,u_i)+ f(x_{i+1},y^*,u^*))$

Exemple (même exemple) :

- i=0

- Prédiction :

$y^*= y_0+hu_0=0+0.1*1=0.1$

$u^*= u_0 + hf(x_0,y_0,u_0)=1+0.1*(0)=1$

- Correction :

$y_1= y_0 + h/2\ (u_0+u^*)=0+0.1/2*(1+1)=0.1$

$u_1 = u_0 + h/2\ (f(x_0,y_0,u_0)+ f(x_1,y^*,u^*))=1+0.1/2(0-0.1)=0.995$

- i=1

- Prédiction :

$y^*= y_1+hu_1=0.1+0.1*0.995=0.1995$

$u^*= u_1 + h\, f(x_1,y_1,u_1)=0.995+0.1*(-0.1)=0.985$

- Correction :

$y_2= y_1 + h/2\ (u_1+u^*)=0.1+0.1/2*(0.995+0.985)=0.19899$

$u_2=u_1+h/2(f(x_1,y_1,u_1)+ f(x_2,y^*,u^*)) = 0995+0.1/2(-0.1-0.1995) = 0.975025$

3.2. Méthode de RK4 :

$k_{1y}=hu_i$

$k_{1u}=hf(x_i,y_i,u_i)$

$k_{2y}=h(u_i+k_{1u}/2)$

$k_{2u}=hf(x_i +h/2,y_i+ k_{1y}/2,u_i+k_{1u}/2)$

k_{3y}= =$h(u_i+k_{2u}/2)$

k_3u= $hf(x_i +h/2,y_i+ k_{2y}/2,u_i+k_{2u}/2)$

k_{4y}= $h(u_i+k_{3u})$

k_{4u}= $hf(x_i +h,y_i+ k_{3y},u_i+k_{3u})$

$y_{i+1}=y_i+(k_{1y}+2k_{2y}+2k_{3y}+k_{4y})/6$

$u_{i+1}=u_i+(k_{1u}+2k_{2u}+2k_{3u}+k_{4u})/6$