

الأعمال الموجهة رقم 3 (طرق حساب التكامل)

(الشريين:1) أوجد التكامل الآتي حسب قيم $n \in \mathbb{N}$ و $\alpha \in \mathbb{Z}$: (يترك للطالب)

$$I = \int_1^2 (x^n - x^\alpha)^2 dx$$

(الشريين:2) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية:

$$I_1 = \int_1^x \ln t \, dt ; \quad I_2 = \int_1^x t^\alpha \ln t \, dt \quad (\alpha \in \mathbb{Q}) \quad (\text{ت. ط}) ; \quad I_3 = \int \tan^2 x \, dx \quad (\text{ت. ط}) ; \quad I_4 = \int x \tan^2 x \, dx$$

(الشريين:3) من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$ لتكن التكاملات التالية:

$$A = \int_0^\alpha e^t \cos 2t \, dt , \quad B = \int_0^\alpha e^t \sin 2t \, dt , \quad I = \int_0^\alpha e^t \cos^2 t \, dt , \quad J = \int_0^\alpha e^t \sin^2 t \, dt$$

(1) باستعمال التكامل بالتجزئة أوجد علاقيتين تربطان A و B .

(2) استنتج قيم التكاملين A و B .

(3) أحسب $I + J$ و $I - J$ ، ثم استنتج قيم التكاملين I و J . (يترك للطالب)

(الشريين:4) باستعمال التكامل بالتجزئة و/أو تبديل متغير أحسب الدوال الأصلية التالية:

$$I_1 = \int \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}} \quad ; \quad I_2 = \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} \quad ; \quad I_3 = \int e^{2x} \cos(e^x) \, dx \quad (\text{ت. ط})$$

$$I_4 = \int x e^{\sqrt{x}} \, dx \quad (\text{ت. ط}) ; \quad I_5 = \int \cos x \, e^{\sin x} \, dx \quad (\text{ت. ط})$$

(الشريين:5) ليكن التكاملين الآتيين: (يترك للطالب)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx , \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$$

برهن أن $I = J$ واحسب $I + J$ ، ثم استنتج قيم التكاملين I و J .

(الشريين:6)

(1) باستعمال تبديل المتغير $u = \frac{\pi}{4} - t$ برهن المساواة التالية:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) \, dt$$

(2) من أجل $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ، تأكد مما يلي : (يترك للطالب)

$$\cos t > 0 , \quad \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) > 0 \quad \text{et} \quad 1 + \tan t = \frac{\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}$$

(3) باستعمال الأسئلة السابقة برهن أن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

(تمرين 7): من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نضع:

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{e^{1-t} t^n}{n!} dt \quad , \quad J_n = I_n(1) = \int_0^1 \frac{e^{1-t} t^n}{n!} dt \quad , \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

(1) أحسب $I_1(x)$.

(2) استنتج علاقة بين $I_n(x)$ و $I_{n-1}(x)$.

(3) أحسب التكامل $I_n(x)$ بدلالة n ، واستنتج عبارة J_n .

(4) من أجل n مثبت أوجد النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$

(5) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أكتب العلاقة بين J_n و J_{n-1} ، ثم برهن أن: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n!}$

(6) استعمل الأسئلة السابقة للبرهان أن: $u_n \leq e \leq u_n + \frac{1}{n!}$

(7) أحسب النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (يترك للطالب)

(تمرين 8): من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ليكن التكاملين التاليين: (يترك للطالب)

$$F(x) = \int \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^3} dx \quad , \quad K_n = \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

(1) باستعمال تبديل متغير ملائم برهن أن: $F(x) = K_3$

(2) باستعمال التكامل بالتجزئة برهن العلاقة التراجعية التالية :

$$K_{n+1} = \frac{t}{2n(t^2 + 1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot K_n$$

(3) أحسب K_1 ، ثم استنتج قيمة $F(x)$.