

1.2 الإستقرارية:

يقال عن السلسلة الزمنية أنها مستقرة إذا كانت الخصائص الإحصائية لها ثابتة خلال الزمن أي أن هذه الخصائص لا تتغير بالإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية. والخصائص الإحصائية للسلسلة (العملية) يمكن وصفها بشكل مؤكد وكامل عن طريق دالة الاحتمال التراكمي. ويمكن وصفها بشكل جزئي عن طريق بعض المؤشرات الهامة وأهمها التوقع والتباين والتغاير (عزوم الدرجة الأولى والثانية). ولذلك يفرق الإحصائيون بين الاستقرار التام والاستقرار الضعيف.

1.1.2 الاستقرار التام:

يقال أن السلسلة الزمنية أو العملية العشوائية المتقطعة $(X_t, t \in Z)$ أنها مستقرة استقرارا تاما إذا كان توزيع الاحتمال التراكمي المشترك لأي مجموعة جزئية من المتغيرات التي تتكون منها السلسلة لا يتأثر بالإزاحة إلى الأمام أو إلى الخلف أي عدد من الوحدات الزمنية. فإذا كانت $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ مجموعة جزئية من الوحدات الزمنية حيث: $m = 1, 2, \dots$ ، وكان: $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ فإن السلسلة $(X_t, t \in Z)$ مستقرة استقرارا تاما إذا كانت دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ تساوي دالة الاحتمال التراكمي المشتركة للمتغيرات $(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_m+k})$ لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ وأي تأخر k . وبصورة رياضية فإن السلسلة X_t تامة الإستقرارية إذا كان:¹ (DERGAOUI. R (2016); p6)

$$P(X_{t_1} \leq c_1, X_{t_2} \leq c_2, \dots, X_{t_m} \leq c_m) = P(X_{t_1+k} \leq c_1, X_{t_2+k} \leq c_2, \dots, X_{t_m+k} \leq c_m) \\ = F(c_1, c_2, \dots, c_m) \quad \dots \dots \dots (1-2)$$

لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ وأي تأخر k .

وتمثل القيم $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ أي ثوابت تقع داخل نطاق العملية العشوائية، والاستقرار التام بمفهومه السابق يعني ببساطة أن آلية التوليد للعملية العشوائية تحت الدراسة ثابتة من خلال الزمن، بحيث إن شكل النموذج وقيم معاملاته لا تتغير بتغير الزمن.

مثال 1-2: إذا كانت السلسلة $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ نامية الاستقرار، اثبت ان:

$$(i) F(X_t) = F(X_{t+k})$$

$$(ii) F(X_t, X_{t-1}) = F(X_{t+k}, X_{t-1+k})$$

الحل:

1- نضع $t_1 = t, m = 1$ في المعادلة (1-2):

$$P(X_t \leq c_1) = P(X_{t+k} \leq c_1) \quad \forall c_1$$

ومن ثم فإن:

$$F(X_t) = F(X_{t+k}) \quad \forall k$$

2. نضع $t_1 = t, t_2 = t-1, m = 2$ في المعادلة (2.1) نجد:

$$P(X_t \leq c_1, X_{t-1} \leq c_2) = P(X_{t+k} \leq c_1, X_{t-1+k} \leq c_2) \quad \forall (c_1, c_2)$$

Donc:

$$F(X_t, X_{t-1}) = F(X_{t+k}, X_{t-1+k}) \quad \forall k$$

3. نضع $k = \pm 1, t_1 = 2, t_2 = 5, t_3 = 10, m = 3$ في المعادلة (2.1) نجد:

$$P(X_2 \leq c_1, X_5 \leq c_2, X_{10} \leq c_3) = P(X_3 \leq c_1, X_6 \leq c_2, X_{11} \leq c_3) \quad \forall (c_1, c_2, c_3)$$

ومن ثم فإن:

$$F(X_2, X_5, X_{10}) = F(X_3, X_6, X_{11}) = F(X_1, X_4, X_9)$$

ومن التعريف السابق نجد أن الاستقرار التام للعملية العشوائية يؤدي بالضرورة إلى ثبات متوسط وتباين العملية العشوائية، وذلك إذا كانت العزوم من الدرجة الأولى والثانية موجودة. أيضا التغيرات بين أي متغيرين $X_s, X_t, X_{s+1}, X_{t+1}$ يعتمد على الفجوة الزمنية التي تفصل بين هذين المتغيرين، أي أن الإستقرارية التامة تؤدي

2.1.2 الإستقرارية الضعيفة:

لدراسة خصائص العملية العشوائية $(X_t, t \in Z)$ واختبار سكونها واختبار استقرارها التام يجب معرفة دالة الاحتمال التراكمي المشتركة لأي مجموعة من النقاط الزمنية $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ ، وأي قيمة صحيحة m أو على الأقل تقديرها بشكل جيد إحصائيا، ويعد هذا من الأمور الصعبة إن لم يكن مستحيلا. ولحسن الحظ في موضوعات الإحصاء بصفة عامة وفي مجال السلاسل الزمنية بصفة خاصة أن العزوم الأولى والثانية غالبا ما

تعريف 1-2: يقال أن العملية العشوائية $(X_t, t \in Z)$ مستقرة استقرارا ضعيفا إذا كانت العزوم حتى الدرجة الثانية موجودة و تحقق الشروط الآتية:

1. التوقع لا يعتمد على الزمن $E(X_t) = \mu \quad \forall t \in Z$
2. التباين لا يعتمد على الزمن $V(X_t) = \sigma^2 = \gamma(0) \quad \forall t \in Z$
3. التغير بين أي متغيرين يعتمد فقط على الفجوة الزمنية التي تفصل بينهما، أي أن:

$$COV(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h) \quad \forall t \in Z$$

في مجال الإحصاء لا نشترط أن تكون السلسلة الزمنية مستقرة استقرارا تاما، ولكن نكتفي فقط بالاستقرار الضعيف.

يقيس التغير الذاتي $\gamma(h) = \gamma(s, t)$ درجة الاعتماد (الارتباط) الخطي بين جميع القيم التي يمكن أن تولدها العملية عند الزمن s وتلك القيم التي يمكن أن تولدها عند الزمن t .

تعريف 2-2: لتكن $(X_t)_{t \in Z}$ عملية عشوائية. نسمى دالة التغير الذاتي للعملية $(X_t)_{t \in Z}$ الدالة γ المعرفة كما يلي: $(Hamilton, J-D (2016))^3$

$$\forall h \in Z : \gamma(h) = Cov(X_t, X_{t-h}) \quad \dots\dots\dots(3-2)$$

حيث:

$$Cov(X_t, X_{t-h}) = E[(X_t - E(X_t))(X_{t-h} - E(X_{t-h}))]$$

ملاحظة: الدالة γ هي دالة زوجية

$$\gamma(h) = \gamma(-h) \quad \forall h$$

حيث:

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = Cov(X_{t-h}, X_{(t-h)+h}) = Cov(X_{t-h}, X_t) = \gamma(-h)$$

مثال 2-2: لتكن $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ متتالية من المتغيرات العشوائية التي تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع 0 وتباين σ^2
 $(E(Z_t)=0 \quad V(Z_t)=\sigma^2)$ حيث:

$$X_t = Z_t \text{ et } Y_t = (-1)^t Z_t$$

- بين إن كانت X_t و Y_t مستقرة.

- نفس السؤال بالنسبة لـ: $X_t + Y_t$

الحل:

1.

$$E(X_t) = E(Z_t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$V(X_t) = V(Z_t) = \sigma^2 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = E(X_t X_{t-h}) - E(X_t)E(X_{t-h}) \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma(h) = E(X_t X_{t-h})$$

$$\text{for } h=0 \quad ; \quad \gamma(h) = E(X_t X_t) = V(X_t) = \sigma^2$$

$$\text{for } h=1 \quad ; \quad \gamma(h) = E(X_t X_{t-1}) = E(Z_t Z_{t-1}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{or } h>1 \quad ; \quad \gamma(h) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي العملية العشوائية X_t مستقرة

2.

$$E(Y_t) = E((-1)^t Z_t) = (-1)^t E(Z_t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$V(Y_t) = V((-1)^t Z_t) = (-1)^{2t} \text{Var}(Z_t) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma(h) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = E(Y_t Y_{t-h}) - E(Y_t)E(Y_{t-h}) \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

$$\gamma(h) = E(Y_t Y_{t-h})$$

$$\text{for } h=0 \quad ; \quad \gamma(h) = E(Y_t Y_t) = V(Y_t) = \sigma^2$$

$$\text{for } h=1 \quad ; \quad \gamma(h) = E(Y_t Y_{t-1}) = E((-1)^t Z_t (-1)^{t-1} Z_{t-1}) = (-1)^{2t-1} E(Z_t Z_{t-1}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$