

Chapitre II : Calcul des propositions

- Formule
- Sémantique des formules (vraie, fausse)
- Inférence (dédire des formules à partir d'autres formules)

1 Alphabet et mots

Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini).

- Les éléments de A seront appelés des "lettres de A ".
- A sera appelé "un alphabet".

Exemples.

$$A = \{a, b, c, d, \dots, z\}$$

$$A = \{(,)\}$$

Définition 1.1. Un *mot* u sur un alphabet A est une suite finie d'éléments de A .

$$\begin{aligned} u : \{1, 2, 3, \dots, n\} &\longrightarrow A \\ k &\mapsto u(k) = u_k \end{aligned}$$

- On note $u = u_1 u_2 \dots u_n$
- $n = l(u) = \text{longueur du mot } u$.

Exemples

Si $A = \{a, b\}$, alors $ababa$, aab , b sont des mots de A^* .

Si $A = \{(,)\}$, alors $(,)$, $((,))$ sont des mots sur A^* .

Si $A = \{a, b, c, d, \dots\}$, alors $u = \text{bonsoirhak}$ est un mot de A^* , de longueur 10, tel que

$$\begin{aligned} \text{bonsoir} : \{1, 2, 3, \dots, 7\} &\longrightarrow A \\ k &\mapsto u(k) = u_k \\ 1 &\mapsto u(1) = u_1 = b \\ 2 &\mapsto u(2) = u_2 = o \end{aligned}$$

- On note A^* l'ensemble de tous les mots sur A .

Définissons l'opération :

$$\begin{aligned} . : A^* \times A^* &\longrightarrow A^* \\ (u, v) &\mapsto u.v \end{aligned}$$

comme suit : pour tous $u = u_1 u_2 \dots u_n$ et $v = v_1 v_2 \dots v_n$

$$u.v = u_1 u_2 \dots u_n v_1 v_2 \dots v_n$$

- L'opération $.$ est associative, en effet,

$$u.(v.w) = (u.v).w, \quad \forall u, v, w \in A^*$$

- L'opération $.$ admet un élément neutre, c'est le mot vide, noté ε (mot qui ne contient aucune lettre). En effet,

$$u.\varepsilon = \varepsilon.u = u, \quad \forall u \in A^*$$

- $l(u.v) = l(u) + l(v)$

2 Formules propositionnelles et leur syntaxe

Soit P un ensemble non vide qui ne contient ni les connecteurs propositionnels $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, ni $(,)$.

Nous appellerons P l'ensemble des propositions élémentaires (pas forcément au sens du chapitre I).

Les éléments de P seront notés $p, q, r, s, \dots$.

- Nous définissons un alphabet A par :

$$A = P \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \cup \{(,)\}.$$

- Soit A^* l'ensemble des mots sur A .

Définition 2.1. L'ensemble $\mathcal{F}$ des **formules propositionnelles** est la plus petite partie de A^* vérifiant :

- 1) $P \subset \mathcal{F}$;
- 2) Si $F \in \mathcal{F}$ alors $\neg F \in \mathcal{F}$;
- 3) Si $F, G \in \mathcal{F}$ alors $(F \text{ b } G) \in \mathcal{F}$
avec $b = \wedge, \vee, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

Exemples.(explication en cours)

$p, \neg p, (\neg p \wedge q), ((\neg p \wedge q) \Rightarrow r)$ sont des formules. Par contre $pq, q \wedge s$ et $\neg p \wedge \neg(p \wedge (q \Rightarrow p))$ ne le sont pas.

Remarques.

- Une formule est un mot obtenu à partir de A en suivant les règles 1), 2), 3).
- "plus petite partie" est à prendre au sens de l'inclusion des ensembles :
Si $\mathcal{Y} \subset A^*$ vérifie 1), 2) et 3), alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$.
- Il y a au moins une partie de A^* qui vérifie 1), 2), 3), c'est A^* , et donc

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\substack{\mathcal{Y} \subset A^* \\ \mathcal{Y} \text{ vérifie 1), 2), 3)}} \mathcal{Y}.$$

Il s'agit d'une définition descendante de $\mathcal{F}$: on part de A^* et on arrive à $\mathcal{F}$.

- $\mathcal{F}$ est un exemple de ce qu'on appelle un ensemble inductif fabriqué à partir d'une base $B \subset A^*$ à laquelle on applique certaines opérations. Dans le cas de $\mathcal{F}$, on a $B = P$ et les opérations sont $\neg$ et "b". L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ en est un autre exemple d'ensembles inductifs, qui a pour base $B = \{0\}$.